

# 多重介入時間數列預測模式之個案研究

邵曰仁\* 林裕發\*\*

\*輔仁大學統計學系

\*\*輔仁大學應用統計研究所

(收稿日期：85 年 10 月 7 日；第一次修正：86 年 4 月 8 日；第二次修正：86 年 4 月 19 日；接受刊登日期：86 年 6 月 11 日)

## 摘要

在現今商業競爭激烈的環境中，如何有效地預估銷售量是一項很重要的商機。若無法有效率預測未來銷售量，則庫存管理與未來行銷策略便會發生問題；亦即，庫存太多，則公司將付出高額的庫存成本，但如果庫存低於顧客訂單數，則無法滿足顧客的需求，喪失了顧客對產品的信心，將付出的代價更是不可估計。本文以實務上，產品促銷活動常遇到的問題為例，介紹如何應用修正之時間數列模式化的技術，將現有資料模式化，而得到一個較可靠及較準確的預測模式。傳統的時間數列及介入模式的應用，大多數僅限於單一或極少數的介入事件影響；本文探討了不同於傳統上的應用，但卻在實務上常遇到的預測問題：多重介入事件影響及未來不可知的介入事件影響。在現有資料不是很充足下，本文利用了修正技術，以解決預測模式化的困難點，本文並進而將之應用在一個實務例子上，其優異之結果亦在本文展示。

關鍵詞彙：時間數列，介入模式，促銷活動

## 壹 緒論

在現今商業競爭日增的情形下，企業投注於研究開發的成本支出均大幅的增加。因此，若不能對未來市場的供需程度做精確的預估，將會造成巨大的損失，甚至危及企業的生存。在這樣的危機意識之下，企業希望能用較佳的預測法以將不確定性降到最低。我國目前正面臨著產業轉型期，勞力密集的產業，在國內已發展到一個瓶頸，進而紛紛轉往東南亞或大陸。有些公司在台灣本地並無工廠生產產品，必需經由國外進口，但是從向國外下訂單到收到貨品，須經一段相當長的時間，因此行銷部門與倉儲部門對未來的訂貨量，必需能準確的預估，以避免損失。一般來說，企業在沒有實施促銷活動時的銷售量變動不大；而主要的問題在於有促銷活動的期間，促銷活動雖然帶動了更高的銷售量，然而卻也引起了廠商內部的困擾：廠商如果無法有效率地預測未來促銷銷售量，則產品的庫存管理便發生了問題；亦即，產品庫存太多，則公司將付出高額的庫存成本，但如果庫存低於顧客訂單數，則

又無法滿足顧客的需求，喪失了顧客對產品的信心，則將付出的代價更是不可估計。同時，行銷部門也必須確切掌握較可靠的預測銷售量，以期能有效地計畫行銷策略，而這些行銷策略的成功與否，將直接影響廠商的利潤。

產品銷售量之預測方法，因而成為廠商對未來的不確定性尋經把脈之重要利器。正確之預測，除可供企業決策人員或生產部門，做為擬訂生產計劃排程、人力調配、庫存管理之參考外，更可做為行銷策略之參考依據，以能更精確地掌握銷售市場。然而在傳統上，產品銷售的預測大都由人為來決定，個人的喜好及企業內部的不一致性（例如產品 A 及產品 B 的負責人對其產品，不一定會有相同的預測結果，於是在組合產品中，便易產生問題），造成了偏高的變異性，於是往往造成了 50% 甚或更高的誤差率。

就上述實務問題而言，產品銷售量乃統計相關而非統計獨立，即當期的觀察值與前一期（或前幾期）的觀察值有某種程度的關係存在。所以這樣的資料特性，使用自我迴歸移動平均整合（Autoregressive Integrated Moving Average，簡稱 ARIMA）是較合適的預測方法；我們若能計算出當期產品銷售量與前一期（或前幾期）的觀察值之間的相關程度，則對之後的模式建構與預測有很大的幫助。另外，本研究結合介入模式（Intervention Model，簡稱 IM）於 ARIMA 中，主要用意在於解決促銷活動介入的干擾因素。本研究除了將展示運用 ARIMA 及 IM 結合的方法外，並且將討論在模式建構過程中，對於變數的權數量化與當介入變數過多時所遭遇的問題，提出解決的方法，本研究並將所提出之解決方法應用於實證研究，其優異性將被展示。

本研究結構如下所述：第二節將介紹 ARIMA 及 IM 之理論，文獻探討亦在本節介紹；第三節則著重在實證研究的分析及其困難處和解決方法的介紹，結果的比較及模式能力評估亦在本節展示；最後以結論與建議結束本文。

## 貳 相關文獻及理論探討

在預測方法的歸類上，基本上可分為兩種型態：定性方法（Qualitative Methods）與定量方法（Quantitative Methods）。定性方法通常透過專家的意見，再依據過去的經驗，或特殊感官功能對未來的事件作本質、特性的預測；定量方法則是將歷史事件，化成時間數列資料趨勢圖，並判別出他們的特徵，以數理方法模式化後再做量的預測（吳柏林，1994）。本研究的預測方法以定量方法中的 ARIMA 及 IM 結合模式為主。因為產品銷售量之數列本

身乃統計相關而非統計獨立，即當期的觀察值與這前一期（或前幾期）的觀察值有某種程度的關係存在，因此資料本身的特性較不適用迴歸分析。而若採用 ARIMA 及 IM 結合模式，不但可利用 ARIMA (Box and Jenkins, 1970, 1976; Box, Jenkins, and Reinsel, 1994) 模式化方法對歷史資料加以分析，檢視自我相關與偏自我相關等特性，並且利用 IM 更可對促銷活動介入的干擾因素加以模式化。故本研究採用了自我迴歸移動平均整合模式加上介入模式的整合運用進行預測。

一般而言，ARIMA 模式可表示為：

$$\phi_p(B)\Phi_p(B^L)(1-B^d)(1-B^L)^D Z_t = \delta + \theta_q(B)\Theta_q(B^L)a_t, \quad (1)$$

其中， $\delta$  為常數項，

$Z_t$  為時間  $t$  期之觀察值，

$a_t$  為相互獨立且呈常態分配之噪音項或稱為白噪音數列 (White Noise)，

$p$ 、 $q$ 、 $P$ 、 $Q$  表模式階數 (Order)，

$d$ 、 $D$  分別為非季節性差分及季節性差分，

$B$  為後移運算子，即  $B^i Z_t = Z_{t-i}$ ，

$L$  為資料之週期 (如季資料則  $L=4$ ，月資料則  $L=12$ )，

$\phi_p(B)$  及  $\Phi_p(B)$ ，表  $p$ 、 $P$  階之  $B$  的多項式，

$\theta_q(B)$  及  $\Theta_q(B)$ ，表  $q$ 、 $Q$  階之  $B$  的多項式，即

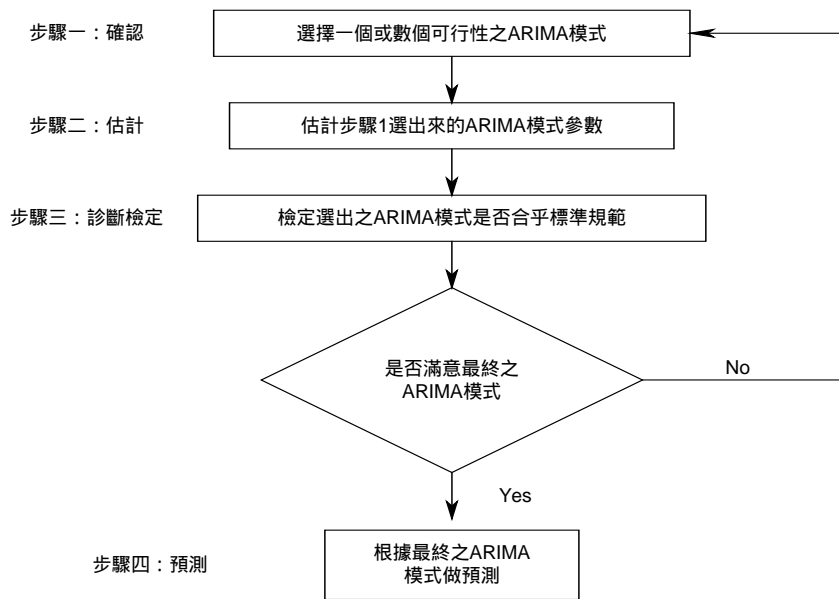
$\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$  為一般性自我迴歸，

$\Phi_p(B^L) = (1 - \Phi_{1,L} B - \Phi_{2,L} B^{2L} - \dots - \Phi_{p,L} B^{pL})$  為季節性自我迴歸，

$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$  為一般性移動平均，

$\Theta_q(B^L) = (1 - \Theta_{1,L} B - \Theta_{2,L} B^{2L} - \dots - \Theta_{q,L} B^{qL})$  為季節性移動平均。

而 ARIMA 模式建立之方法主要包括四步驟：(1) 模式之確認 (Identification)；(2) 模式參數之估計 (Estimation)；(3) 模式之診斷檢定 (Diagnostic Checking)；及(4) 預測未來數值 (Forecasting)。其流程如圖一所示。



圖一 ARIMA 模式建立方法與步驟

資料來源：Pankratz, 1983, p.17

由於時間數列趨勢常因為外來事件的介入，(例如政策法令的變更 (Haque, 1990)、罷工、公司促銷活動 (Somers and Gupta, 1994) 等等，此類事件被稱為介入變數)，因而受到改變或干擾影響模式建構，進而影響預測結果，所以 Box 和 Tiao (1975) 及 Box 和 Jenkins (1976) 在 ARIMA 模式中加入階段性和波動性變數。ARIMA 及 IM 模式配合統計電腦軟體之運用，已廣泛地應用於經濟、企管商業、工程、自然與社會科學等領域上，成效頗為卓著 (Box and Tiao, 1975; Geurts and Tolley, 1990; Geurts and Whitlark, 1994)。Box 和 Tiao (1975) 將介入模式運用於經濟與環境問題的評估。Bhattacharyya and Layton (1979)，Haque (1990) 運用介入模式評估澳洲政府的一項新政策的效益，其做法將實施前後視為兩個不同的階段，加入一階段性變數，而後在針對此一變數的顯著與否評定政策的效用。Somers and Gupta (1994) 和 Shao (1997) 更將介入變數運用於廣告策略改變時其效率的評估上。

傳統上，我們將介入變數影響分成兩類：

(1) 階段性函數 (Step Function)

此種影響自時間數列在時間  $T$  起產生作用，影響強度不會隨時間移動而減低；此種影響可表示為：

$$S_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t < T; \\ 1, & t \geq T. \end{cases}$$

## (2)波動性函數 (Pulse Function)

此種影響自時間數列在時間 T 起產生作用，但影響強度僅維持一期；此種影響可表為：

$$P_t^{(T)} = \begin{cases} 0, & t = T; \\ 1, & t \neq T. \end{cases}$$

而介入變數影響時間數之趨勢可能是暫時性或階段性的，而其影響過程可能是漸進性或突發性；這些情形可以以介入模式的一般式來表示：

$$V_t = \frac{W_0 B^b}{zB} I_t^{(T)},$$

其中  $V_t$  表回應函數， $I_t$  是介入變數 ( $I_t$  可為階段性、波動性或後述之四種離群值模式)。例如  $V_t = W_0 B^b P_t^{(T)}$  是表示強度  $W_0$  之介入影響，經過  $b$  期以後有波動性反應。

上述之介入變數是在當介入事件發生的時間和原因皆已知的情況。然而在分析時間數列資料的過程中，某些突發事件的時間和原因是無法事先得知，例如在分析商業的時間數列資料時，某些無法預期的事件的干擾（如罷工、經濟危機等），此種干擾的因素若未妥善的處理將會造成參數估計、預測、季節調整之偏差，因之針對突發事件我們必須加以偵測。Guerard (1989) 將介入模式離群值的偵測應用於每季每股盈餘時間數列資料的預測模式中，以解決每季每股盈餘時間數列中離群值的問題，其研究結果顯示使用離群值偵測模式會使預測更有效率。關於離群值偵測模式的討論可參見 Fox (1972), Hillmer (1984), Tasay (1988), Chang, Tiao and Chen (1988), Chen and Tiao (1990) 和 Chen and Liu (1993)。下述為四種基本離群值模式之簡介：

## (1)增減性離群值 (additive outlier, 簡稱 AO)

$$Y_t = X_t + \omega I_t^{(T)} \quad \text{其中 } I_t^{(T)} = \begin{cases} 1, & t = T, \\ 0, & t \neq T, \end{cases}$$

## (2)創新性離群值 (innovational outlier, 簡稱 IO)

$$Y_t = X_t + \omega \frac{\theta(B)}{\phi(B)} I_t^{(T)} \quad \text{其中 } I_t^{(T)} = \begin{cases} 1, & t = T, \\ 0, & t \neq T, \end{cases}$$

(3) 水平位移 (level shift, 簡稱 LS)

$$Y_t = X_t + \omega \frac{1}{(1 - \delta B)} I_t^{(T)} \quad \text{其中 } I_t^{(T)} = \begin{cases} 1, & t = T, \\ 0, & t \neq T, \end{cases}$$

(4) 暫時性變更 (temporary change, 簡稱 TC)

$$Y_t = X_t + \omega \frac{1}{(1 - B)} I_t^{(T)} \quad \text{其中 } I_t^{(T)} = \begin{cases} 1, & t = T, \\ 0, & t \neq T. \end{cases}$$

## 參 實證研究

本文實證研究的對象，為某化妝品公司某一特定產品之銷售量，該公司對於銷售期間的劃分是將一年分為 18 期，資料的收集亦是依照每一期的銷售量來記錄，一年共有 18 個銷售量值。而且該公司的促銷活動亦是配合此一期間，因為該特定產品之促銷活動種類較多且較頻繁，所以其銷售值的變化變動性非常大（見圖二），同時亦增加了產品銷售預測的複雜性與困難性；但也因為促銷活動的變動影響，產品促銷的預測，需運用介入模式與 ARIMA 模式的結合應用。

圖二 歷史數據對時間的線圖

圖二展示了該公司產品的銷售值，這些促銷活動的影響可視為介入事件（見表一），而其發生的時間及原因為其公司內部既定的政策，為事前已知的介入變數，所以不適用於離群值之偵測模型，因而將介入變數（亦即促銷活動）的影響歸屬於短暫波動性，於是在考慮 IM 時，是以波動性函數為主的。同時該公司的促銷種類繁多，而每一種促銷活動都有其特定的影響層次，在理想狀態下，應將每種促銷活動的影響都加以模式化，但因為歷史數據只有 88 組，數據在不算完全充足的情形下，去估計太多的介入參數，反而造成參數不精準，甚或無法對參數作估計（參數估計會發散）。所以針對產品促銷值影響分佈及歷史數據數量之考量，我們儘可能將促銷活動的影響分類成數個促銷活動之類型，例如打折、買一送一、...等等，並分別將同類型之促銷活動，依其強度的大小予以量化。

表一 某產品之 13 組促銷活動銷售值

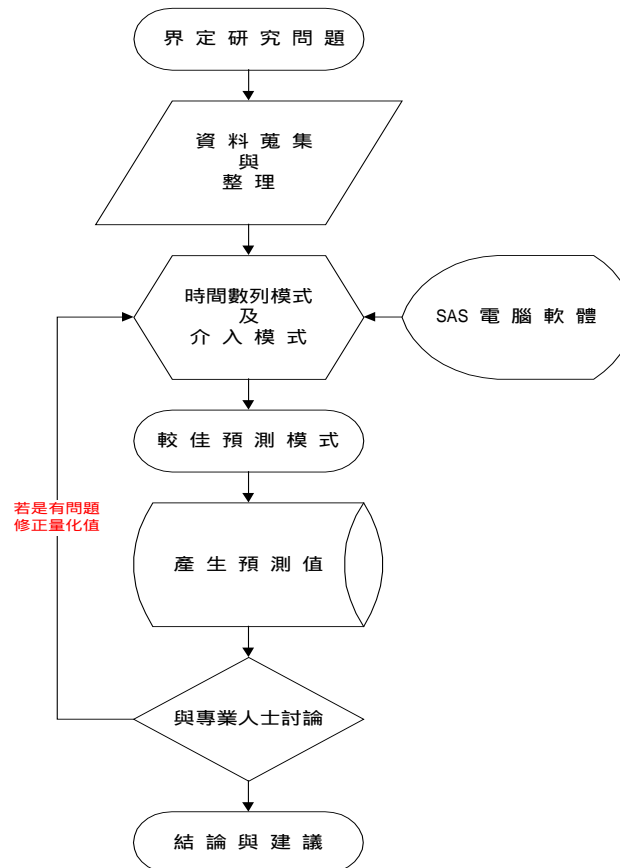
3/92 銷售量：1661 買滿 \$ 300 送花之戀鏡梳組一組
9/92 銷售量：3215 全面八折
9/92 銷售量：1188 買任一項產品，送果香亮光唇膏一支 (值 60 元)
17/92 銷售量：2162 買任二項該系列產品送唇彩筆或眼彩筆或眼線筆 (約值 100 元)

9/93 銷售量：1107 本期凡購買該系列之產品每滿 500 元即送「花事隨手記」一本 (值 200 300 元)
17/93 銷售量：1326 買滿 \$ 5000 元送該系列之第二代產品一組
1/94 銷售量：7929 買任三項該系列產品可得一項贈品
5/94 銷售量：1275 買任兩項該系列產品可得一支唇彩筆或眼線筆 (值 150 元)
12/94 銷售量：2858 買所有眼部彩妝品買第一個九五折，買第二個五折
15/94 銷售量：1619 該公司產品全面九折
16/94 銷售量：9730 本期凡一次購買該系列產品任三項送二即送密彩或唇膏 (250 元) + 指甲油 (150 元)
4/95 銷售量：4008 本期凡一次購買該公司產品任三項送春蝶提包
5/95 銷售量：4169 所有眼部彩粧品打七折

在量化的過程中，必須不斷的與該公司的專業人員探討產品特性、促銷活動形態與廣告活動等多種屬性，加以諮詢了解，再進一步的調整量化值，以求量化的客觀性。但這當中，仍有不一致性的問題存在（例如不同部門的專業人員對產品的屬性有不同的觀感），因此往往須費相當多的時間進行溝通，此為本研究所遭遇的困難之一。本研究另一困難處在於：即使 ARIMA 及 IM 模式建立完成後，未來之促銷活動可能發生與現行之促銷活動不一樣（例如新的促銷活動），所以在產品銷售量的預測時，仍然會造成困難，因而前段所述之促銷活動之分類，就更加重要了。

本實證研究之流程如圖三所示，首先針對公司所需，界定研究問題，進而蒐集整理研究所需相關資料後；以時間數列模式及介入模式的理論為根基進行實證研究，進而挑選出較佳預測模式並產生促銷預測值，當實際的銷售值發生後，再與專業人士討論進行量化值的修正，最後對本研究之結論與建議予以摘述。





圖三 研究流程

我們現以某項產品為例子，說明藉由 ARIMA 及 IM，如何將該項產品的資料數據模式化，並得到一最適合的統計預測模式。首先我們觀察 1991 年第 13 期至 1996 年第 10 期共 88 組歷史數據，其中有 13 組促銷活動銷售值。因為這些促銷活動能吸引消費者購買的慾望，因此往往帶動了銷售量的大量增加（例如圖二中的 1994 年第 16 期）。因為這些促銷活動其發生的時間及原因為其公司內部既定的政策，為事前已知的介入變數。所以是屬於波動性且強度極大的介入變數影響。我們將此 13 組促銷活動區分為三種類別，並依此三種促銷型態分別定為三個介入變數（分別稱為  $P_{1t}$ 、 $P_{2t}$  及  $P_{3t}$ ），其歸類如下：

$P_{1t}$ ：打折，

$P_{2t}$ ：買滿一定的金額送非該公司之產品，

$P_{3t}$ ：買任幾項、送幾項，

其中  $t$  為期數，例如  $P_{13}$  為代表第三期有打折這項促銷活動。

上述之介入變數  $P_{1t}$  為促銷型態的類別，不是數量型資料，因此在分析之前必須將其轉換成數量型資料。本研究採的初始量化式子如下<sup>1</sup>：

$$(\text{個別促銷的銷售量}) \div (\text{所有促銷的總銷售量}) \times 100 = \text{個別促銷的量化值}$$

舉例來說，此項產品打折的這一個促銷型態，八折的量化值為 17；此一量值是由該系列產品在歷史數據中同屬於打八折的促銷型態有兩期，促銷量分別為 3215 (UNITS) 與 2858 (UNITS)，將此二項加總後除以 2，求得一平均個別促銷的銷售量：3036 (UNITS)，再將此平均個別促銷的銷售量 3036 (UNITS) 除以所有促銷的總銷售量 17756 (UNITS) 得到 0.17，然後將 0.17 乘以 100 就會得到 17。經由上式量化的方式，將每一個促銷活動的促銷型態量化成一個數值，再以這些量化的值進行模式的建立，進而以量化值顯現出其效用的大小。例如此項產品打折的這一個促銷型態八折的量化值為 17，九折的量化值為 9.1。但不同的促銷型態的類別間不能比較大小，例如此項產品打折的這一個促銷型態八折的量化值為 17，而買任兩項該系列產品可得一支唇彩筆或眼線筆 (值 150 元)，這一個促銷型態的量化值為 9.7，這兩個不同的促銷型態的類別量化值是不能比較大小。運用上述量化過程，該系列產品詳細的量化值如表二所示。

表二 該系列產品促銷型態分類表

促銷型態	量化值	促銷活動
P1t	17	全面八折
P1t	17	買所有眼部彩妝品買第一個九五折，買第二個五折
P1t	9	該公司產品全面九折
P2t	6.6	買任一項產品，送果香亮光唇膏一支 (值 60 元)
P2t	7.7	本期凡購買該系列之產品每滿 500 元即送「花事隨手記」一本 (值 200 300 元)
P2t	7.7	買滿 \$ 5000 元送該系列之第二代產品一組
P2t	9.7	買任兩項該系列產品可得一支唇彩筆或眼線筆 (值 150 元)
P3t	9.7	買任二項該系列產品送唇彩筆或眼彩筆或眼線筆 (約值 100 元)
P3t	39.7	買任三項該系列產品可得一項贈品

<sup>1</sup> 在研究的過程中，我們曾嘗試過不同的的方法，然而，一些量化方法並不適合（例如：我們從實務中發現打折與量化值間並非呈直線關係，因而所有假設為線性關係的量化方法就不適合了）。而本研究基於：(1) 經過與公司之專業人士討論，及 (2) 較適合變數量化的實際關係，遂採用了文中所提出的方法。

P <sub>3t</sub>	49.7	本期凡一次購買該系列產任三項送二即送密彩或唇膏 (250 元) + 指甲油 (150 元)
-----------------	------	---

我們將量化過程，整合於 ARIMA 及 IM 後，預測模式為：

$$y_t = \delta + v_t + N_t$$

其中  $y_t$  為在  $t$  時間的觀測值， $\delta$  為常數， $v_t$  為介入變數， $N_t$  為誤差(即觀測值 - 預測值)。因為我們將介入變數分成三個型態 (而此三個型態影響之層次均不同)，於是上述預測模式將修正為：

$$y_t = \delta + \omega_1 P_{1t} + \omega_2 P_{2t} + \omega_3 P_{3t} + N_t \quad (1)$$

其中  $P_{1t}, P_{2t}$  及  $P_{3t}$  值定義分別如下：

$$P_{1t} \begin{cases} 0 & \text{當期沒有[打折]的促銷型態} \\ \text{給定一量值} & \text{當期有[打折]的促銷型態} \end{cases} ,$$

$$P_{2t} \begin{cases} 0 & \text{當期沒有[買滿一定的金額} \\ & \text{送非該公司之產品]的促銷型態} \\ \text{給定一量值} & \text{當期有[買滿一定的金額} \\ & \text{送非該公司之產品]的促銷型態} \end{cases} ,$$

$$P_{3t} \begin{cases} 0 & \text{當期沒有[買任幾項,送幾項]的促銷型態} \\ \text{給定一量值} & \text{當期有[買任幾項,送幾項]的促銷型態} \end{cases} ,$$

而  $\omega_1, \omega_2$  及  $\omega_3$  皆為參數值，可經 SAS/ETS (1993) 處理產生估計值。

建立預測模式第一步驟為模式之確認；上述預測模式 (方程式 (1)) 經過 SAS 處理後，我們檢視圖四，自我相關函數 (sample autocorrelation function 簡稱：SAF) (Chatfield, 1980) 及 (Priestley, 1981) 在 lag=1 時有尖點 (spike)，且其 SAF 圖形是屬於切斷型態 (cut off)。另外偏自我相關函數 (sample partial autocorrelation function 簡稱：SPAF) 在 lag=1 時出現尖點，且其 SPAF 圖形亦屬於切斷型態 (cut off)。由上列幾點所述我們因而可暫時認定兩個模式，亦即 AR (1) 或 MA (1) 模式：

$$\text{模式一：} y_t = \delta + \omega_1 P_{1t} + \omega_2 P_{2t} + \omega_3 P_{3t} + \frac{1}{(1 - \phi_1 B)} a_t$$



15	15665.881	0.18311	.	****
16	8472.696	0.09903	.	**
17	5829.058	0.06813	.	*
18	12796.001	0.14957	.	***
19	13408.704	0.15673	.	***
20	6301.508	0.07366	.	*
21	9627.119	0.11253	.	**
22	4189.968	0.04897	.	*
23	-1066.608	-0.01247	.	.
24	2542.150	0.02971	.	*

"," marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.37383	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*****	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	0.08022	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	0.13116	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	***	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	0.07211	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	0.19610	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	****	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	0.03368	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	-0.02369	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	0.11523	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	-0.00365	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	-0.01665	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	-0.05893	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	0.09704	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	0.12700	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	***	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	0.00285	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	0.10044	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	-0.04630	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	-0.03319	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	0.03816	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	0.05986	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	-0.07341	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	0.02822	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	-0.04208	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	-0.10511	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	0.00763	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

圖四 SAF 及 SPAF

建立預測模式的第二步驟為參數之估計，SAS 輸出報告展示出各個模式參數的估計值和 Q\* 統計量 (見表三)。

表三 參數估計結果

參數	模式一	模式二	模式三	模式四	模式五	模式六
$\bar{\delta}$	525.48 (10.62)**	527.71 (12.65)**	527.46 (10.46)**	531.48 (8.19)**	523.63 (9.69)**	526.35 (11.95)**
$\bar{\omega}_1$	145.44 (29.52)**	142.82 (28.39)**	141.85 (29.44)**	143.64 (30.15)**	143.47 (29.87)**	142.09 (28.53)**
$\bar{\omega}_2$	91.7	96.21	98.36	94.54	94.79	96.81

	(6.6)**	(6.72)**	(7.31)**	(7.04)**	(7.09)**	(6.98)**
$\bar{\omega}_3$	183.26 (48.45)**	182.53 (47.36)**	183.5 (50.28)**	184.12 (50.44)**	183.86 (50.34)**	183.51 (48.53)**
$\bar{\phi}_1$	0.4026 (3.88)**	-	-	0350 (3.37)**	0.358 (3.31)**	-
$\bar{\Phi}_1$	-	-	0.25 (2.22)**	0.231 (2.2)**	-	-
$\bar{\theta}_1$	-	-0.359 (-3.39)**	-0.314 (-2.88)**	-	-	-0.287 (-2.67)**
$\bar{\Theta}_1$	-	-	-	-	-0.219 (-1.94)*	-0.179 (-1.62)
Q* 統計量	模式一	模式二	模式三	模式四	模式五	模式六
lag k=6	[5.68]	[11.37]**	[4.22]	[0.96]	[2.66]	[8.17]*
lag k=8	[9.31]	[16.46]	[6.49]	[3.02]	[5.26]	[12.24]
lag k=12	[16.26]	[24.94]	[12.73]	[8.06]	[11.22]	[20.10]
lag k=24	[19.43]	[28.47]	[16.91]	[11.67]	[15.33]	[24.23]

註：1.()內為 T 統計量、[]內為 Q\* 統計量

2.\*\*： =0.05 時顯著

3.\*： =0.1 時顯著

建立預測模式的第三步驟為診斷檢驗，由圖五至圖十（見附錄）展示了 SAS 輸出報告中之各個模式殘差項檢驗；亦即殘差自我相關函數（sample autocorrelation function of the residuals 簡稱：RSAF）及殘差偏自我相關函數（sample partial autocorrelation function of the residuals 簡稱：RSPAF），我們將個別檢視其是否呈現白噪音序列的型態。觀察圖五和圖六（即模式一和模式二），我們發現模式一和模式二在 RSAF 和 RSPAF 中 lag=5 有突出的尖點，這些現象都表示殘差項並非呈現白噪音序列的型態，且檢視模式二的殘差當 lag=6 時 Q\* 統計量（亦即 Ljung-Box statistic (Ljung and Box 1978)）為 11.37（相對應之 P\_value=0.045<0.05），因而拒絕  $H_0: \rho_k=0$  的假設，因此我們可將模式一和模式二這兩個暫定模式剔除。接著我們觀察圖七和圖十（即模式

三和模式六) 我們發現模式三在 RSPAF 中 lag=13 有突出的尖點而模式六在 RSAF 中 lag=6 有突出的尖點, 這些現象都表示了殘差項並非呈現白噪音序列的型態, 因此我們亦將模式三和模式六這兩個暫定模式剔除。最後針對剩下的二個模式我們由圖八和圖九 (即模式四和模式五) 可知兩個模式的殘差項檢定、RSAF 及 RSPAF 皆呈現出白噪音序列的型態, 雖然其中有某些 RSAF 值或 RSPAF 值略微顯著的情況, 但大致上看來  $Q^*$  統計量皆不拒絕  $H_0: \rho_k=0$  的假設, 因之我們可視兩個模式的殘差項皆呈現出白噪音序列的型態。

接著我們由表四比較模式四 AR (1,5) 與模式五 ARMA (1,5), 發現模式四及模式五此兩個模式在 AIC、SBC 及 Standard Error (S.E.) 皆無明顯的差異, 且由表 3 參數估計的結果我們發現模式四及模式五的參數估計皆為顯著, 因此在預測模式的選擇上我們選擇模式四及模式五; 亦即,

$$\text{模式四: } y_t = 531.4 + 143.64P_{1t} + 94.54P_{2t} + 184.12P_{3t} + \frac{1}{(1-0.35B-0.231B^5)} a_t$$

$$\text{模式五: } y_t = 523.63 + 143.47P_{1t} + 94.79P_{2t} + 183.86P_{3t} + \frac{(1+0.219^5)}{(1-0.358B)} a_t$$

表四 模式之選取準則

	模式四	模式五
AIC	1237	1239
SBC	1252	1253
S.E.	265.31	267.34

建立預測模式的第四步驟為預測。利用預測模式, 我們可以預測未來的銷售量。之後, 當實際的銷售值產生後, 再與專業人士討論進行量化值的修正, 如此不斷的修正預測模式以期能更精確的估計銷售量。經由上述建立預測模式的四個步驟, 我們得到兩個預測模式 (模式四及模式五), 為了能更進一步的比較, 我們可對此二個模式進行模式預測能力的評估。

在比較模式間的預測能力方面, 一般可採用二個模式預測能力評估準則: (1)絕對平均百分比誤差 (mean absolute percentage error, 簡稱 MAPE) 及 (2)平均平方根百分比誤差 (root mean square percentage error, 簡稱 RMSPE) (鄭天澤及時巧煒, 1995)。事實上, MAPE 的使用較 RMSPE 要廣泛些 (Martin and Witt, 1989b), 並且對管理者或非統計技術人員而言, MAPE 是較好的評估準則 (Pankratz, 1983)。MAPE 及 RMSPE 其計算公式分別如下:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{Y_t} \times 100$$

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left( \frac{e_t}{Y_t} \right)^2} \times 100$$

其中

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

$Y_t$  代表實際值

$\hat{Y}_t$  代表預測值

$n$  為預測期數

而利用 MAPE 及 RMSPE 評估預測能力的分類如下：(Martin 及 Witt, 1989b)

- < 10 預測能力極佳
- 10 - 20 預測能力不錯
- 20 - 50 預測能力合理
- > 50 預測不正確

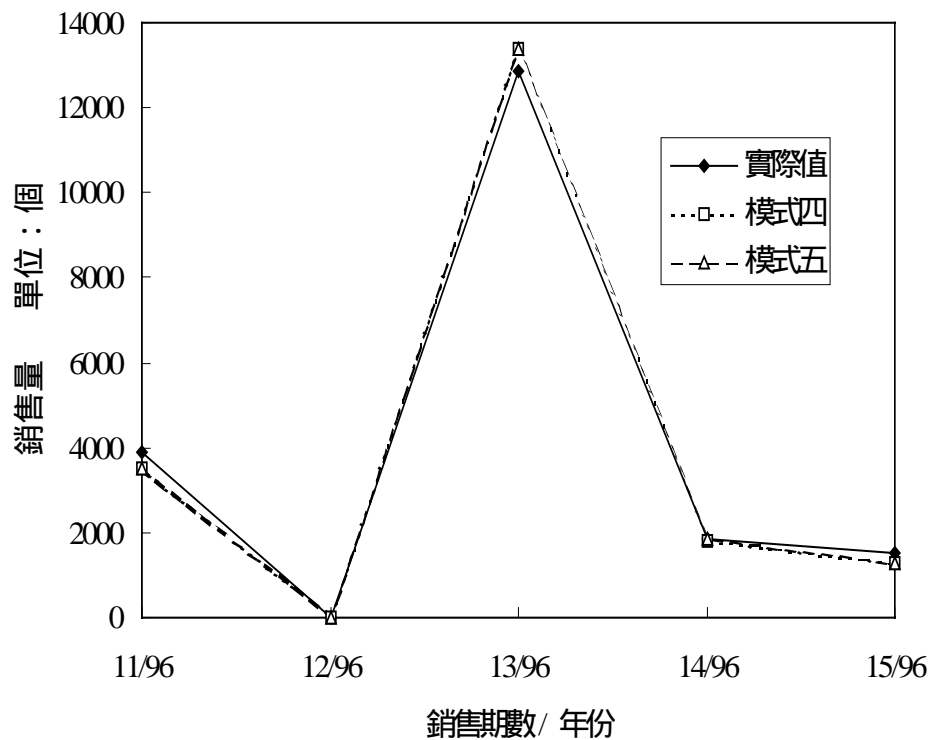
針對上述兩種預測能力評估準則，我們分別計算模式四和模式五的 MAPE 及 RMSPE (見表五)。圖十一展示了模式四和模式五的的預測值與實際值的線圖 (註解：因為本研究公司的特定政策原因，12/96 未作任何銷售活動，所以該期之銷售值為 0)。觀察圖十一我們可看出模式四和模式五與實際值發生值與趨勢皆相當吻合；再配合表五，我們亦可觀查到模式四和模式五的 MAPE 及 RMSPE 介於 7 至 12 之間，代表著此二模式皆屬於預測能力不錯的模式。但若就模式四和模式五二者間要挑選一個模式，由於模式五的 MAPE 及 RMSPE 皆小於模式四，所以本研究建議採用模式五；亦即，

$$\text{模式五：} y_t = 523.63 + 143.47P_{1t} + 94.79P_{2t} + 183.86P_{3t} + \frac{(1 + 0.219B^5)}{(1 - 0.358B)} a_t$$

表五 模式四和模式五的之預測能力評估

	模式四	模式五
MAPE	8.32	7.59
RMSPE	10.02	9.64





圖十一 模式四和模式五的預測值與實際值對時間的線圖

## 肆 結論與建議

### 一、研究結論

為了驗證本研究方法比該公司原先內部預測的準確，表六展示出實際促銷值、模式五之預測值與該公司原先內部預測值，並分別計算 MAPE 與 RMSPE。觀察表六，我們可明顯的看出，該公司原先內部預測值與實際促銷值有很大的差異。如果根據該公司原先內部預測值購買產品，將有過多的產品剩餘，並進而造成過高的庫存成本，且該公司原先內部預測無法提供預測值的標準差，以作為評定預測值之考量。反觀，模式五之預測值相當接近實際發生值，且標準差為 272 (標準差標記在括號內 0)，預測值加減 1.5 倍標準

<sup>1</sup> 因為本研究之公司的特定政策原因，12/96 未作任何銷售活動，所以該期之銷售值為 0

差之內皆包含實際發生值，所以模式五的預估能力是優於該公司原先內部預測。且由表五樣本外預測能力的評估，模式五的 MAPE 及 RMSPE 值小於 10，在衡量預測能力的等級上是屬與預測能力極佳。

表六 實際值對照於模式 5 之預測值與該公司原先內部預測值比較表

預測能力評估	實際發生值	模式 5 之預測值	該公司原先內部預測值
	3910	3521(267)	2900
	12858	13406(283)	16600
	1848	1851(285)	2000
	1537	1291(285)	1055
MAPE		7.59	23.63
RMSPE		9.64	22.23

括弧內為標準誤

預測模式的建立有許多種方式，不同屬性的資料分別有其合適的預測模式，對於銷售量預測模式而言，數列本身具有相當的自我相關，因此資料本身的特性較不適用迴歸分析。因之本研究運用修正的 ARIMA 與 IM 模式的結合，充分的將所有可用的資訊包含於模式中，提供更可靠及準確的估計，如此更有利於決策的參考。反觀該公司原先在產品銷售量的預測上僅是以點預測的方法產生預測值。經由上述模式的評估，可知本文提出的方法，對於產品銷售量的預測上，的確優於原先該公司內部的預測值。並且本研究所提出的方法，在 MAPE 及 RMSPE 評估預測能力的分類上，是屬於預測能力不錯的等級，亦即本研究所提出結合 ARIMA 與 IM 模式的預測方法在外樣本預測能力的評估上具有不錯的預測能力。因此本研究所提出的方法，在實務上具有相當不錯的效用。

## 二、研究限制

本文於研究過程中雖已力求嚴謹與完整，惟仍有下列研究上之限制：

- (1) ARIMA 與 IM 之結合方法，在模式確認及較佳模式之決定過程中，常涉及個人主觀判斷，因而可能會影響研究結果之客觀性。而模式之建立，需經多方面之比較與測試，本研究所建立之模式為可接受之模式，但並非絕對唯一之模式。
- (2) 本研究主要在預測促銷活動時之銷售值，故有介入變數之產生，但因為促銷活動種類過多，在歷史數據不算充足情況下，無法對每一種促銷活動做探討，只好在有限的資源下，將促銷活動的影響歸類，但將

促銷活動影響分類等級，卻涉及個人主觀判斷，而且在做促銷活動預測時，因為促銷活動的不同，加權 (Weight) 的數值，也會隨著個人主觀不同；並且，就算同樣的促銷活動，也常因為當期的廣告策略或其他產品配合銷售等等因素，而有不同的影響，因而可能會影響研究結果之客觀性。

### 三、後續研究之建議

基於本研究之限制及研究過程中所獲得之經驗，謹提供下列數點建議供後續研究之參考：

本研究預測模式的建立，因介入變數的影響，需要人為判斷加權比重的大小，而此加權比重的取值，直接影響促銷活動的預測值，為減少人為因素的主觀性，應由某專人負責此加權比重的取值，如此，才不會造成多人主觀的判斷，而造成不一致性的促銷活動。同時，此專門人員需對該產品的促銷活動了然於胸，才能較客觀或較正確地將促銷活動等級分類。

修正預測值為時間數列分析法中之重要步驟之一，因此，待新的促銷觀測值產生後，後續研究者可利用該新觀測值，來修正預測模式，而產生新的預測值，並將其與實際值相互比較計算絕對誤差百分率，若此誤差百分率不大，該模式仍可延用，否則也許應考慮重新建立一新的預測模式。

未來期望能藉由專家系統 (Expert System) 將專家知識統一與整合，並且付諸在 ARIMA 及 IM 模式分析技術中，此一整合，不僅易消弭不一致性問題，縮短模式建立時間，更能提升預測之能力與可靠性。

### 參考文獻

吳柏林，「時間數列分析導論」，台北：雙葉書廊，1994年。

鄭天澤、時巧煒，「來華觀光旅客需求預測模式比較分析」，*管理評論*，第十四卷，第一期，1995年1月，頁77-116。

Abraham, B. and Ledolter, J., "Statistical Method for Forecasting", New York: John Wiley, 1983.

Bhattacharyya, M. N. and Layton, A. P., "Effectiveness of seat belt legislation on the Queensland road toll - an Australian case study in intervention analysis", *Journal of the American Statistical Association*, 74, 1979, pp.596-603.

Box, G. E. P. and Tiao, G. C., "Intervention analysis with applications to economic and environmental problems", *Journal of the American Statistical Association*, 70, 1975, pp.70-92.

- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden Day, Oakland, CA, 1976.
- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel G.C., "Time Series Analysis", *Forecasting and Control*, 3rd edn, 1994. (Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc.)
- Chatfield, C., "Inverse Autocorrelation", *Journal of the Royal Statistical Society*, A. 142, 1980, pp. 363-377.
- Chang, Tiao, G. C. and Chen, C., "Estimation of time series parameters in the presence of outlier", *Technometrics*, V. 30, 1988, pp. 193-204.
- Chatfield, C., "Inverse Autocorrelation", *Journal of the Royal Statistical Society*, A142, 1979, pp.363-377.
- Chen, C., and Tiao, G. C., "Random Level Shift Time Series Models ARIMA Approximation, and Level Shift Detection", *Journal of Business and Economic Statistics*, V. 8, 1990, pp.170-186.
- Chen, C. and Liu, L.-M., "Forecasting Time Series with Outliners", *Journal of Forecasting*, V. 12, 1993, pp.13-35.
- Cleveland, W. S., "the inverse Autocorrelation of a time series and their applications", *Technometrics*, V 14, 1972, pp.277-293.
- Cooper, D. M., and Wood, E. F., "Identifying multivariate time series models", *Journal of Time Series Analysis*, V 3, 1982, pp.153-164.
- Fox, A. J., "Outliers in Time Series", *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. 34, 1972, pp.350-363.
- Geurts, Michael D. and Tolley, H. Dennis., "Causal partitioning and sales forecasting accuracy", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, V. 37, 1990, pp.1-12.
- Geurts, Michael D. and Whitlark, D., "Partitioning a time series to increase accuracy in marketing response models", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, V. 51, 1994, pp.49-55.
- Gray, H. L., Kelley, G. D., and McIntire, D. D., "A new approach to ARMA modeling", *Journal of Communication in Statistics*, B 7, 1978, pp.1-77.
- Guerard, John B., "Automatic time series modeling, intervention analysis, and effective forecasting", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, V. 34, 1989, pp.43-49.
- Haque, M. O., "Preliminary evaluation of the Victorian zero blood alcohol content legislation at alcohol times : an Australian case study in intervention analysis", *Journal of Communication in Statistics*, Part A--Theory and methods, V. 19, 1990, pp.3881-3889.
- Hillmer, S. C., "Monitoring and Adjusting Forecasts in the Presence of Additive Outliners", *Journal of Forecasting*. V. 3, 1984, pp.205-215.
- Ljung, G. M. and Box, G.E.P., "On a measure of lack of fit in time series models", *Biometrika*. V. 65, 1978, pp.67-72.
- Martin, C. A. and Witt, S. F., "Forecasting Tourism Demand: A Comparison of the Accuracy of Several Quantitative Methods", *Internation Journal of Forecasting*, V. 5, 1989a, pp 7-19.















11	-1262.179	-0.01695	.	.	.
12	6943.831	0.09323	.	**	.
13	12390.913	0.16637	.	***	.
14	4351.017	0.05842	.	*	.
15	11403.356	0.15311	.	***	.
16	4554.554	0.06115	.	*	.
17	-523.604	-0.00703	.	.	.
18	8863.610	0.11901	.	**	.
19	8355.695	0.11219	.	**	.
20	-685.431	-0.00920	.	.	.
21	9203.734	0.12358	.	**	.
22	3055.494	0.04103	.	*	.
23	-4826.246	-0.06480	.	*	.
24	2670.054	0.03585	.	*	.

." marks two standard errors

Partial Autocorrelations

Lag	Correlation	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	
1	0.06705	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	0.12612	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	***	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	0.12333	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	0.05640	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	0.03012	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	0.15600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	***	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	-0.03423	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	0.09988	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	0.03429	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	0.01690	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	-0.07314	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	0.04281	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	0.16673	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	***	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	-0.00129	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	0.10884	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	-0.00913	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	-0.05419	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	0.05424	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	0.06914	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	-0.04118	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	*	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	0.02438	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	-0.00074	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	-0.11911	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	**	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	-0.00297	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

圖十 模式六之殘差項檢定、RSAF 及 RSPAF

## Multiple Intervention Time Series Analysis: A Case Study

YUEHJEN E. SHAO\* AND YUE-FA LIN\*\*

\*Department of Statistics, Fu Jen Catholic University

\*\*Institute of Applied Statistics, Fu Jen Catholic University

### ABSTRACT

The precise forecast of the sales is the key factor for surviving in today's tough competition. This study is concerned with the modeling of the sales promotion data which are autocorrelated. In contrast to the traditional time series intervention analysis, which focuses on the effects of single or few interventions, this study considers the cases in which multiple interventions and the unsure of future interventions exist in the system.

In addition, this study utilizes a set of real sales promotion data to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: time series, intervention model, sales promotion