

# 資產報酬率分配對風險值計算之影響

張揖平 洪明欽 陳哲弘

東吳大學商用數學系

(收稿日期：90 年 12 月 10 日；第一次修正：91 年 5 月 31 日；

接受刊登日期：91 年 10 月 21 日)

## 摘要

財政部計劃推行以風險值做為衡量金融機構的資本適足率之基礎，因此風險值是否能準確的計算，便成了金融機構能否避免面臨破產危機的一項重要關鍵。本文模擬市場上各種不同模型之資產報酬率資料，並且使用市場上常用且簡單的風險值計算方法計算風險值，包括有參數型固定波動率模型法、歷史模擬法、HD 法、指數加權移動平均法、指數加權移動平均-歷史模擬法和指數加權移動平均-HD 法。模擬結果發現若資產報酬率模型的分配和真實分配不同時，參數型固定波動率模型之風險值估計會有相當程度的誤差。而當資產報酬率之分配發生改變時，指數加權移動平均-歷史模擬法和指數加權移動平均-HD 法之風險值計算仍維持不錯的結果。此外，由台灣發行人加權股價指數日報酬率及美元對台幣匯率日報酬率資料之實證結果，亦可得到指數加權移動平均-歷史模擬法或指數加權移動平均-HD 法之風險值計算的表現不錯。因此，指數加權移動平均-歷史模擬法或指數加權移動平均-HD 法是頗值得參考使用的風險值計算法。

關鍵詞彙：風險值，參數型固定波動率模型法，歷史模擬法，HD 法，指數加權移動平均法，指數加權移動平均—歷史模擬法，指數加權移動平均—HD 法

## 壹 緒論

近年來，由於全球資訊的快速傳播以及國際資金往來的日漸頻繁，促使全世界金融環境面臨巨大的變化，例如直接金融市場的快速成長和新金融商品的不斷創新等。而這些改變也使得大多數的金融機構必須對其原有的投資策略進行調整，放棄單純以借貸資金為唯一本業的投資策略，改採主動地在證券、外匯或衍生性金融商品等市場上進行交易。雖然如此多樣化投資可能獲得較高的利潤，但是由於財務市場上的波動性與日俱增，因此相對地金融機構也面臨到更大的市場風險。所以，若是金融機構對其所面對的風險沒有加以好好控管，當市場上有極端虧損的事件發生時，則很可能就會產生金融機構宣布破產或倒閉的現象，甚至引發連鎖反應而造成區域性或全球性的金融危機。如同 1995 年初，有二百三十三年歷史的英國霸菱 (Barings) 銀行，僅僅因為一名

---

\* 本文作者感謝國科會計劃 NSC 89-2745-P-031-003 之補助研究及兩位審查委員的建議與指正，使本文更完善表達。

新加坡交易員李森 (Nick Lesson) 對日經二二五指數的操作不當，而造成了十三億美元的鉅額虧損，將銀行的百年基業付之一炬。此外，美國的橘郡 (Orange county) 也是因為其基金經理人錯估了市場的情況，而使原本極為富裕的橘郡也走向了破產之路。再者，最近的恩隆 (Enron) 案，也是類似的案例。由此可知，對金融機構而言，有效的風險管理是相當的重要。

為了有效地控管金融機構的風險，在 1988 年時，國際清算銀行 (Bank of International Settlements；簡稱 BIS) 在巴賽爾會議中提出了巴賽爾協定 (Basle Accord)，訂定了銀行最低標準自有資本和風險性資產比例的計算方式。三十人集團 (Group of Thirty) 在 1993 年建議以風險值 (Value-at-Risk；簡稱 VaR) 作為衡量市場風險的標準，再加上 J.P. Morgan (1996) 對 Riskmetrics 的大力推動，此後，風險值便成為了市場上普遍認同較佳衡量市場風險的方法。在 1997 年時，十大工業國 (G-10) 同意採行兩種衡量資本適足額度的方案，其一為標準 (standardized) 方案，另一則為國際清算銀行建議的內部模型 (internal model) 方案。所謂內部模型是指鼓勵金融機構在符合主管機關的規定之下，自行發展一套適合其內部風險控管系統的方法，如此所估計的最適資本會較標準法來得更為精確 (一般而言也較低)。但為了檢測金融機構所申報的風險值模型是否有誤，國際清算銀行提出了一套回顧測試 (back-testing) 的方法，即是將過去一年持有部位資料的每日實際損失值和風險值做比較，以決定其最適資本適足率。至於我國的資本適足額度的相關規定主要是參照日本和巴賽爾協定的多項法規所訂定，在民國八十七年公布了“銀行自有資本與風險性資產之範圍計算方法及未達標準之限制盈餘分配辦法修正條文”，其中包括提供銀行標準方案與內部模型方案來衡量市場風險，以計算出金融機構所需計提之最適資本準備。

一般而言，由上述可知，使用內部模型方案所估計的最適資本會較標準方案來得精確，但金融機構要決定使用那一套內部模型方案以配合其內部風險控管系統亦相當重要。市場上對風險值計算的相關研究不勝枚舉。早期的實證研究需假設資產之報酬率服從常態分配，而使用常態分配法來計算風險值，但此方法只有在資產報酬率之分配為常態分配時，風險值才能估計的很準，否則，此方法所計算之風險值誤差較大。許多實證研究 (如 Hsieh (1988), Meese (1986), 和 Hull 與 White (1998) 等) 發現市場上許多資產報酬率的歷史資料之分配並不為常態分配，而是具有高峰、厚尾或偏態的現象。因此，若無法精確估算資產報酬率的分配，則所求得的風險值之誤差可能很大，且這種因模型使用錯誤所產生之風險甚至高於市場風險。本文主要是利用蒙地卡羅模擬法

(Monte-Carlo simulation method) 模擬市場上不同分配之資產報酬率資料，並利用穿透率 (violation rate) 來探討市場上較常使用的風險值計算方法之優劣，由此歸納出一個計算簡單且較不易受資產報酬率模型影響的風險值計算方法，並輔以台灣發行量加權股價指數日報酬率及美元對台幣匯率日報酬率的實證研究，以觀察是否亦適用於市場上的實證資料。

本文第一節介紹風險值的重要性及研究動機。第二節將介紹市場上常用的風險值計算方法。第三節利用蒙地卡羅模擬法探討各風險值計算方法之優劣。第四節為風險值計算法應用在台灣發行量加權股價指數日報酬率及美元對台幣匯率日報酬率的實證結果。第五節為結論。

## 貳 風險值計算法介紹

風險值是金融機構衡量可能發生最大損失金額的一項工具。其定義為金融機構投資於市場標的物時，因標的物資產價格的變動所導致的可能最大損失金額，即為風險值。亦即在未來某一特定時間和信心水準  $1-\alpha$  之下，所計算出資產報酬的市場風險，或是此一資產報酬可能發生的最大損失。Hull 與 White (1998) 曾提出風險值的定義為：「有  $100(1-\alpha)\%$  的信心在未來  $N$  天內的損失不會超過  $V$  元」，其中  $V$  值即為風險值。有關風險值計算方法的介紹及回顧可參考 Morgan (1996)、Duffie (1997)、Dowd (1998) 和 Jorion (2000) 等。本文僅探討一些常用的風險值計算法在不同資產報酬率模型下的表現。

令  $X_t$  表示資產在時間  $t$  時的價值，則在連續複利假設下，資產在時間  $t$  時的報酬率  $R_t$  為

$$R_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = \ln X_t - \ln X_{t-1}。$$

為方便起見，定義  $R_i^* = R_{t+i-n}$ ,  $i = 1, \Lambda, n$ ，亦即  $R_i^*$ ,  $i = 1, \Lambda, n$ ，表示時間  $t-n+1, \Lambda, t$  之  $n$  期的資產報酬率，其中  $n$  稱為訓練期間 (learning window) 長度，而資產報酬率資料採用日資料，並且將  $n$  取為一年的交易次數，亦即  $n \approx 250$ 。此外，為方便起見，定義  $\bar{r}$  和  $s$  分別為

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i^* \quad \text{和} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i^* - \bar{r})^2}。$$

## 一、參數型固定波動率模型的風險值計算

參數型固定波動率模型 (constant volatility model, 簡稱 CV 模型) 是最常用的一種風險值計算方法。假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t = \mu + \sigma a_t, \quad (1)$$

其中  $a_t$  為獨立且具有相同分配 (independently and identically distributed; 簡稱 *i.i.d.*) 之連續型隨機變數, 其累積分配函數為  $F(a)$ , 且不失一般性 (without loss of generality) 假設  $E(a_t) = 0$  和  $Var(a_t) = 1$ , 而  $\mu$  和  $\sigma$  分別表示  $R_t$  的平均數和標準差。因此在信心水準  $1-\alpha$  下, 於  $t$  期估計  $t+1$  期的風險值之估計值  $V\hat{a}R_t^{(CV)}$  為

$$V\hat{a}R_t^{(CV)} = -\bar{r} - \sigma q_\alpha,$$

其中  $q_\alpha$  為累積分配函數  $F$  之  $\alpha$  分位數, 亦即  $F(q_\alpha) = \alpha$ 。在此模型下, 若  $a_t \sim N(0, 1)$ , 則稱為 Normal 法, 若  $a_t \sim \sqrt{(d-2)/d}T(d)$ , 則稱為  $T(d)$  法。由於參數型固定波動率模型有模型設定簡單和計算方便的特性, 因此是衡量市場風險最基本的一種風險值計算法。

在風險值的計算上, 對於  $a_t$  的分配是否能正確知道, 會有很大的影響。亦即若  $a_t$  的分配真的就是  $F$ , 則當  $n \rightarrow \infty$  時, 可以證明  $\bar{r} \xrightarrow{P} \mu$  且  $s \xrightarrow{P} \sigma$ , 其中  $\xrightarrow{P}$  表示機率收斂 (converge in probability), 因此  $V\hat{a}R_t^{(CV)} \xrightarrow{P} VaR_t$ , 其中  $VaR_t = -\mu - \sigma q_\alpha$  表示真正之風險值。若假設  $a_t$  的分配為  $F^{(w)}$ , 但  $F^{(w)}$  和  $F$  並不相同, 則此時的  $F^{(w)}$  稱為模型假設的分配 (working distribution), 其  $\alpha$  分位數以  $q_\alpha^{(w)}$  表示。例如資產報酬率的真正分配為  $T$  分配, 但計算風險值時, 卻假設其為常態分配, 此時, 常態分配即是一個模型假設的分配。在  $F^{(w)}$  的假設下所計算出的風險值以  $V\hat{a}R_t^{(w)}$  表示, 且

$$V\hat{a}R_t^{(w)} = -\bar{r} - \sigma q_\alpha^{(w)}。$$

可以證明當  $n \rightarrow \infty$  時,

$$V\hat{a}R_t^{(w)} \xrightarrow{P} -\mu - \sigma q_\alpha^{(w)},$$

其漸近偏差 (asymptotic bias) 為

$$(-\mu - \sigma q_\alpha^{(w)}) - (-\mu - \sigma q_\alpha) = (q_\alpha - q_\alpha^{(w)})\sigma。$$

因此， $VaR_t^{(w)}$  會有偏誤存在，且當  $q_\alpha^{(w)}$  和  $q_\alpha$  相差越大時， $VaR_t^{(w)}$  會估計的越不準確。

## 二、歷史模擬法的風險值計算

由於在計算風險值時並不知道資產的真實報酬率分配是何種分配，而歷史模擬 (historical simulation) 法 (以 HS 法表示) 是利用過去的歷史資料，估計資產報酬率的分配，以求得風險值。假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t = a_t，$$

其中  $a_t$  為 *i.i.d.* 之連續型隨機變數。令  $R_{(i)}^*$  滿足  $R_{(1)}^* \leq \dots \leq R_{(n)}^*$ ，且定義  $R_{(i)}^*$  為  $(i - 0.5)/n$  之經驗分位數 (empirical quantile)，則  $R_{(1)}^*, \Lambda, R_{(n)}^*$  之  $\alpha$  經驗分位數  $\hat{q}_\alpha^{(HS)}$  定義為

$$\hat{q}_\alpha^{(HS)} = (1 - w)R_{(m)}^* + wR_{(m+1)}^*。$$

因此在信心水準  $1 - \alpha$  下，於  $t$  期估計  $t + 1$  期的風險值之估計值  $VaR_t^{(HS)}$  為

$$VaR_t^{(HS)} = -[(1 - w)R_m^* + wR_{m+1}^*]，$$

其中  $m = [n\alpha + 0.5]$ ， $[\cdot]$  表示為高斯函數， $w = n\alpha - m + 0.5$ 。

雖然歷史模擬法在使用上和解釋上都是相當容易的，亦即只要蒐集個別資產的歷史報酬率，即可用來估計風險值。但應用此法時，必須在資產未來的報酬率和過去的報酬率之分配完全相同假設下，才能精準的估計。

## 三、HD法的風險值計算

Harrell 與 Davis (1982) 提出的一種改進計算經驗分位數的方法，稱為 HD 法。而 Ridder (1997) 亦曾將此法應用於風險值計算上。假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t = a_t，$$

其中  $a_t$  為 *i.i.d.* 之連續型隨機變數。令  $R_{(i)}^*$  為滿足  $R_{(1)}^* \leq \dots \leq R_{(n)}^*$  的順序統計量，則 HD 法之  $\alpha$  的經驗分位數  $\hat{q}_\alpha^{(HD)}$  定義為

$$\hat{q}_\alpha^{(HD)} = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{(i-1)/n}^{i/n} \frac{1}{B\{(n+1)\alpha, (n+1)(1-\alpha)\}} y^{(n+1)\alpha-1} (1-y)^{(n+1)(1-\alpha)-1} dy \right] R_{(i)}^* ,$$

其中  $B(s, t)$  為 Beta 函數。因此在信心水準  $1-\alpha$  下，於  $t$  期估計  $t+1$  期的風險值之估計值  $V\hat{R}_t^{(HD)}$  為

$$V\hat{R}_t^{(HD)} = -\hat{q}_\alpha^{(HD)} .$$

由 Harrell 與 Davis (1982) 的研究發現 HD 法較經驗分位數法更能精確估計分位數，因此亦可以更精確計算風險值。

#### 四、指數加權移動平均法的風險值計算

指數加權移動平均 (exponentially weighted moving average) 法 (以 EWMA 法表示) 是 J.P. Morgan (1996) 在 Riskmetrics 上發表的一項計算風險值的方法，其更加強調在接近估計日之資產報酬率資料的重要性，亦即在近期市場的波動對未來的影響會較早期市場的波動來得高，且有波動聚集 (volatility clustering) 的現象，亦即適合用於大的波動伴隨著大的波動而小的波動伴隨著小的波動型態之資料。令  $F_{t-1}$  為包含  $R_{t-1}, R_{t-2}, \dots$  之訊息 (information) 的集合，假設對任何  $t$ ，在  $F_{t-1}$  已知下，資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t | F_{t-1} = \mu + \sigma_t a_t ,$$

其中  $a_t$  為具有標準常態分配之 *i.i.d.* 隨機變數， $\mu$  和  $\sigma_t$  分別表示  $R_t | F_{t-1}$  的平均數和標準差，且

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)(R_{t-1} - \mu)^2 ,$$

亦即  $\sigma_t^2$  為  $\sigma_{t-1}^2$  和其估計值  $(R_{t-1} - \mu)^2$  的加權平均數。 $\lambda$  稱為衰退因子 (decay factor)。因此在信心水準  $1-\alpha$  下，於  $t$  期估計  $t+1$  期的風險值之估計值  $V\hat{R}_t^{(EWMA)}$  為

$$V\hat{R}_t^{(EWMA)} = -\bar{r} - \hat{\sigma}_{t+1} z_\alpha ,$$

其中  $z_\alpha$  為標準常態分配之  $\alpha$  分位數，且

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \sqrt{(1-\hat{\lambda}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\lambda}^i (R_{t-i} - \bar{r})^2}。$$

根據 J.P. Morgan (1996) 在 Riskmetrics 的研究，若資產的報酬率為日資料型態時，則  $\hat{\lambda}$  取 0.94，若為月資料時，則  $\hat{\lambda}$  取 0.97。

## 五、指數加權移動平均—歷史模擬法的風險值計算

由於金融資產的報酬率並不一定服從常態分配，此外，亦常具有波動聚集的現象，因此可將指數加權移動平均法和歷史模擬法的概念結合，稱為指數加權移動平均—歷史模擬法（以 EWMA-HS 法表示）。在  $F_{t-1}$  已知下，假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t | F_{t-1} = \mu + \sigma_t a_t，$$

其中  $a_t$  為 *i.i.d.* 連續型隨機變數，且不失一般性假設  $E(a_t) = 0$  和  $Var(a_t) = 1$ ，

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)(R_{t-1} - \mu)^2，$$

其中  $\lambda$  稱為衰退因子。因此在  $t$  期估計  $t+1$  期的風險值之估計值  $V\hat{a}R_t^{(EWMA-HS)}$  為

$$V\hat{a}R_t^{(EWMA-HS)} = -\bar{r} - \sqrt{(1-\hat{\lambda}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\lambda}^i (R_{t-i} - \bar{r})^2} \tilde{q}_\alpha，$$

其中  $\hat{\lambda}$  的取法和歷史模擬法相同， $\tilde{q}_\alpha$  為  $(R_j - \hat{\mu}_j) / \hat{\sigma}_j$ ， $j = t-n+1, \Lambda, t$ ，之經驗分位數，其中

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{(1-\hat{\lambda}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\lambda}^i (R_{j-i-1} - \hat{\mu}_j)^2}， \tag{2}$$

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{j-i}。 \tag{3}$$

## 六、指數加權移動平均—HD法的風險值計算

由於金融資產的報酬率常具有波動聚集的現象，並且 HD 法又可以改進歷史模擬法之分位數的估計，因此便將二者的概念結合，稱為指數加權移動平均—HD 法 (以 EWMA—HD 法表示)。在  $F_{t-1}$  已知下，假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t | F_{t-1} = \mu + \sigma_t a_t ,$$

其中  $a_t$  為 *i.i.d.* 連續型隨機變數，且不失一般性假設  $E(a_t) = 0$  和  $Var(a_t) = 1$ ，

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(R_{t-1} - \mu)^2 ,$$

其中  $\lambda$  為衰退因子。因此在  $t$  期估計  $t+1$  期的風險值之估計值  $V\hat{a}R_t^{(EWMA-HD)}$  為

$$V\hat{a}R_t^{(EWMA-HD)} = -\bar{r} - \sqrt{(1 - \hat{\lambda}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\lambda}^i (R_{t-i} - \bar{r})^2} \tilde{q}_\alpha^{(HD)} ,$$

其中  $\tilde{q}_\alpha^{(HD)}$  為  $(R_j - \hat{\mu}_j) / \hat{\sigma}_j$ ， $j = t - n + 1, \Lambda, t$ ，之 HD 法經驗分位數，其中  $\hat{\sigma}_j$  和  $\hat{\mu}_j$  分別定義於(2)和(3)式。

## 參 模擬比較

本節將利用模擬方法探討對不同型態之資產報酬率分配的資料，何種風險值計算方法較具有穩健 (robust) 性，亦即較不受報酬率分配之影響。因此使用一些市場上常用來描述資產報酬率分配的模型，產生模擬資料 500 筆，並將 500 筆資料分為兩部分，前 250 筆資料當作是訓練期間樣本，作為報酬率模型參數估計用；而後 250 筆資料作為測試比較用。本文除穩定分配和轉折點模型外，其餘模擬資料之參數取法均使其平均值為 0.0005，標準差為 0.015，此為長期台灣發行量加權股價指數資料計算結果之近似值 而探討的模擬資料之模型和比較準則如下：



## 一、模擬資料的模型

### (一)常態分配模型的資料

假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 之模型為參數型固定波動率模型，亦即(1)式，其中 $a_t \sim i.i.d. N(0,1)$ 。本文假設 $\mu = 0.0005$ 和 $\sigma = 0.015$ 。

### (二) $T$ 分配模型的資料

假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 之模型為參數型固定波動率模型，亦即(1)式，其中 $a_t \sim i.i.d. \sqrt{(d-2)/d} T(d)$ ，其中 $d$ 為 $T$ 分配的自由度。本文假設 $\mu = 0.0005$ 和 $\sigma = 0.015$ ，並為求較具厚尾之模擬資料，因此令 $d = 5$ 。值得注意的是在此模型下， $R_t$ 之峰態係數為9。

### (三)雙重指數分配模型的資料

Linden (2001) 實證結果發現雙重指數分配 (double exponential distribution) 適合描述資產報酬率資料。假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 之模型為參數型固定波動率模型，亦即(1)式，其中 $a_t \sim i.i.d.$  雙重指數分配，且 $R_t$ 之峰態係數亦為6。此外，本文假設 $\mu = 0.0005$ 和 $\sigma = 0.015$ 。

### (四)雙重柏拉圖分配模型的資料

除雙重指數模型外，亦可採用雙重柏拉圖分配 (double-Pareto distribution) 描述資產報酬率具有高峰和厚尾之現象。假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 之模型為參數型固定波動率模型，亦即(1)式，其中 $a_t \sim i.i.d.$  雙重柏拉圖分配，且 $R_t$ 之峰態係數亦為6。此外，本文假設 $\mu = 0.0005$ 和 $\sigma = 0.015$ 。

### (五)穩定分配模型的資料

McCulloch (1996) 指出穩健分配 (stable distribution) 亦適合描述資產報酬率具有高峰和厚尾之現象。假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 之模型為參數型固定波動率模型，亦即(1)式，其中 $a_t \sim i.i.d. Stable(1.5,0,1,0)$ 。本文假設 $\mu = 0.0005$ 和 $\sigma = 0.015$ 。值得注意的是在此模型下， $R_t$ 之變異數不存在。

### (六)混合常態分配模型的資料

當資產報酬率分配為不對稱時，常使用混合常態分配 (mixture normal distribution) 描述。假設資產在時間 $t$ 時之報酬率 $R_t$ 的模型為

$$R_t = \mu_{s_t} + \sigma_{s_t} a_t ,$$

且  $a_t \sim i.i.d. N(0,1)$ ，而  $s_t$  為獨立的隨機變數且

$$P(s_t = 1) = p \text{ 且 } P(s_t = 2) = 1 - p ,$$

其中  $p$  滿足  $p \in [0,1)$  之常數，亦即假設報酬率  $R_t$  之分配有二個狀態，狀態一為  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  分配，其發生的機率為  $p$ ，狀態二為  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  分配，其發生的機率為  $1-p$ （可參考 Hamilton, 1991）。本文假設  $\mu_1 = 0.0004$ 、 $\sigma_1 = 0.011338$ 、 $\mu_2 = 0.0008$ 、 $\sigma_2 = 0.022676$  和  $p = 0.75$ 。

### (七)馬可夫轉換模型的資料

Hamilton (1989) 提出之馬可夫轉換模型 (Markov-switching model) 可視為混和常態分配模型的推廣，由於其具有波動聚集的特性，因此更適合用來描述資產報酬率的分配。對任何  $t$ ，在  $F_{t-1}$  已知下，假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t | F_{t-1} = \mu_{s_t} + \sigma_{s_t} a_t ,$$

且  $a_t \sim i.i.d. N(0,1)$ ，而  $s_t$  服從馬可夫過程 (Markov process) 且滿足其轉換機率 (transition probabilities) 為

$$P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = p_{11} , \quad P(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) = p_{12} ,$$

$$P(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) = p_{21} , \quad P(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) = p_{22} ,$$

且  $p_{11} + p_{12} = p_{21} + p_{22} = 1$ ， $0 \leq p_{11}, p_{12} \leq 1$ ， $0 \leq p_{21}, p_{22} \leq 1$ 。亦即假設報酬率  $R_t$  之分配有二個狀態，狀態一為  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  分配，狀態二為  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  分配。若  $R_{t-1}$  的分配為狀態一， $R_t$  的分配為狀態一的機率為  $p_{11}$ ， $R_t$  的分配為狀態二的機率為  $p_{12}$ ；同理，若  $R_{t-1}$  的分配為狀態二，則  $R_t$  的分配為狀態一的機率為  $p_{21}$ ， $R_t$  的分配為狀態二的機率為  $p_{22}$ 。有關此模型之相關性質，可參考 Hamilton (1994)。本文假設  $p_{11} = 0.95$ 、 $p_{12} = 0.05$ 、 $p_{21} = 0.15$ 、 $p_{22} = 0.85$ 、 $\mu_1 = 0.0004$ 、 $\sigma_1 = 0.011338$ 、 $\mu_2 = 0.0008$ 、 $\sigma_2 = 0.022676$  和  $p = 0.75$ 。

## (八)廣義自我迴歸條件異質變異模型的資料

由 Bollerslev (1986) 所提出廣義的自我迴歸條件異質變異 (generalized autoregressive heteroskedastic ; 簡稱 GARCH) 模型, 具有波動聚集和高峰及厚尾的特性, 因此亦適合描述資產報酬率的分配。對任何  $t$ , 在  $F_{t-1}$  已知下, 假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型為

$$R_t | F_{t-1} = \mu + \sigma_t \varepsilon_t ,$$

其中  $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$  為 GARCH( $p, q$ ) 模型, 亦即  $\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1)$ , 且

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 ,$$

其中  $\alpha_0 > 0$  且  $\alpha_i \geq 0, i=1, \Lambda, q$ , 和  $\beta_i \geq 0, i=1, \Lambda, p$ 。本文僅模擬 GARCH(1,1) 模型之資料, 其中  $\mu = 0.0005$ 、 $\alpha_0 = 0.00001125$ 、 $\alpha_1 = 0.05$  和  $\beta_1 = 0.9$ 。

## (九)轉折點模型的資料

由於市場可能突然遭受意外的衝擊, 而使資產報酬率分配發生改變, 或是資產報酬率的波動突然有迅速增減的情形, 可以轉折點模型 (change point model) 描述。本文模擬二種不同的情況, 第一種情況假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  之模型為參數型固定波動率模型, 亦即(1)式, 當市場遭受衝擊後,  $a_t$  之分配由  $N(0, 1)$  變為  $\sqrt{(d-2)/d} T(d)$  之分配, 其中  $d$  取為 5。第二種情況為資產報酬率之波動突然迅速改變的資料, 可參考 Chen 與 Gupta (1997), 假設資產在時間  $t$  時之報酬率  $R_t$  的模型之模型為參數型固定波動率模型, 亦即(1)式, 且  $a_t \sim i.i.d. N(0, 1)$ , 而當市場遭受衝擊後,  $\sigma_t$  由  $\sigma$  變為  $2\sigma$ 。本文假設  $\mu = 0.0005$  和  $\sigma = 0.015$ 。

## 二、評比準則

穿透率是最常被用來衡量風險值計算法是否適當的準則, 其定義為在一定的期間內, 計算此一期間真實報酬率損失大於估計風險值的比例, 亦即

$$\text{穿透率} = \frac{\text{真實報酬率損失大於估計風險值的累計次數}}{\text{觀察樣本次數}}。$$

若穿透率愈接近  $\alpha$  值時，則表示此風險值計算法對風險值的估算愈準確；若穿透率小於  $\alpha$  值時，則表示此風險值計算法高估風險，而高估風險可能會因持有過多的避險資金而造成資金運用沒有效率的情況發生；反之，若穿透率大於  $\alpha$  值時，則表示此風險值計算法低估風險，而低估風險可能有破產的情況發生。一般認為低估風險是較高估風險來得更為嚴重的。

### 三、模擬實證結果

以下表一至表八均為模擬 1000 次之各種風險值計算方法的穿透率結果，括號內為模擬 1000 次的穿透率之標準差。\*\* 表示穿透率最接近  $\alpha$  值，\* 表示穿透率次接近  $\alpha$  值。

表一和表二分別為具有常態分配和  $T(5)$  分配之資產報酬率模擬資料下，各種風險值計算法之穿透率結果，由表中可以明顯地發現在參數型固定波動率模型的風險值計算法中，若資產報酬率假設的分配和真實的分配不相同時，則穿透率會有一個較大的誤差。例如在常態分配的報酬率模擬資料下，若使用  $T(5)$  分配的風險值計算法，其結果便不佳，而在  $T(5)$  分配的報酬率模擬資料下，若使用為常態分配的風險值計算法亦表現不好。由此可知，在風險值的計算上，是否能正確知道資產報酬率的分配是相當重要，若是能準確估計資產報酬率的分配，則可以較精確估計分位數和風險值。此外，HS 法和 HD 法在表一和表二上都有不錯的表現，而 HD 法的表現甚至比 HS 法更佳，此結論和 Harrell 和 Davis (1982) 相同。此外，搭配指數加權移動平均的 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法等都表現的不錯。

表一 模擬具有常態分配之資產報酬率資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0504* (0.0126)	0.0592 (0.0135)	0.0510 (0.0117)	0.0494 (0.0114)	0.0550 (0.0114)	0.0514 (0.0104)	0.0498** (0.0099)
$\alpha = 0.01$	0.0106 (0.0063)	0.0049 (0.0043)	0.0119 (0.0060)	0.0099* (0.0054)	0.0132 (0.0066)	0.0120 (0.0056)	0.0100** (0.0053)

表二 模擬具有  $T(5)$  分配之資產報酬率資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0448 (0.0121)	0.0516 (0.0132)	0.0515 (0.0120)	0.0493* (0.0116)	0.0517 (0.0111)	0.0517 (0.0105)	0.0495** (0.0100)
$\alpha = 0.01$	0.0160 (0.0075)	0.0106** (0.0062)	0.0117 (0.0057)	0.0093* (0.0053)	0.0200 (0.0075)	0.0116 (0.0053)	0.0090 (0.0049)

表三、表四、表五和表六分別為具有雙重指數分配、雙重柏拉圖分配、穩定分配和混合常態分配之資產報酬率模擬資料下,各種風險值計算法之穿透率結果。由這些表可以發現 HS 法和 HD 法在報酬率波動率固定且未來也沒有波動改變時,都會有著不錯的表現。另外,搭配指數加權移動平均法的 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法均有相當好的表現,且和最佳之風險值計算法的結果相差不多。此外,當資產報酬率之分配不為常態分配時,EWMA-normal 法之穿透率有時會有不準確的情況。

表三 模擬具有雙重指數分配之資產報酬率的資料, 各風險值計算法的穿透率

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0494** (0.0128)	0.0555 (0.0136)	0.0514 (0.0121)	0.0493* (0.0119)	0.0552 (0.0113)	0.0518 (0.0104)	0.0493* (0.0097)
$\alpha = 0.01$	0.0197 (0.0081)	0.0135 (0.0068)	0.0120 (0.0061)	0.0098** (0.0055)	0.0233 (0.0076)	0.0118 (0.0053)	0.0096* (0.0048)

表四 模擬具有雙重柏拉圖分配之資產報酬率資料, 各風險值計算法的穿透率

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0300 (0.0127)	0.0326 (0.0135)	0.0512* (0.0117)	0.0484 (0.0113)	0.0421 (0.0114)	0.0528 (0.0118)	0.0497** (0.0113)
$\alpha = 0.01$	0.0165 (0.0085)	0.0133 (0.0074)	0.0119* (0.0058)	0.0086** (0.0051)	0.0242 (0.0082)	0.0119* (0.0054)	0.0086** (0.0046)

表五 模擬具有穩定分配之資產報酬率的資料, 各風險值計算法的穿透率

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0216 (0.0117)	0.0235 (0.0127)	0.0514* (0.0115)	0.0481 (0.0111)	0.0356 (0.0115)	0.0546 (0.0173)	0.0512** (0.0165)
$\alpha = 0.01$	0.0119 (0.0074)	0.0099** (0.0065)	0.0117* (0.0058)	0.0080 (0.0049)	0.0193 (0.0076)	0.0125 (0.0061)	0.0083* (0.0052)

表六 模擬具有混合常態分配之資產報酬率的資料, 各風險值計算法的穿透率

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0463 (0.0121)	0.0531 (0.0131)	0.0517 (0.0121)	0.0494* (0.0117)	0.0521 (0.0113)	0.0521 (0.0103)	0.0496** (0.0099)
$\alpha = 0.01$	0.0162 (0.0076)	0.0110 (0.0063)	0.0117 (0.0060)	0.0097** (0.0054)	0.0195 (0.0077)	0.0116 (0.0052)	0.0095* (0.0050)

表七和表八分別為模擬馬可夫轉換模型和 GARCH(1,1)模型之資產報酬率模擬資料下，各種風險值計算方法之穿透率結果，由此些表可以發現當資產報酬率具有波動聚集特性時，EWMA-HS 法的表現通常會比 HS 法好，由於指數加權移動平均法之變異數的調整會給予近期報酬率較高的權重，故具有高波動伴隨高波動，低波動伴隨低波動的聚集特性。因此對於具有波動聚集現象之報酬率資料，指數加權移動平均法會有較佳的風險值計算。

表七 模擬馬可夫轉換模型之資產報酬率的資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0463 (0.0141)	0.0530 (0.0151)	0.0517 (0.0138)	0.0494** (0.0135)	0.0519 (0.0116)	0.0513 (0.0104)	0.0492* (0.0101)
$\alpha = 0.01$	0.0162 (0.0082)	0.0108 (0.0065)	0.0123 (0.0066)	0.0100** (0.0059)	0.0174 (0.0073)	0.0117 (0.0054)	0.0094* (0.0050)

表八 模擬參數為  $\alpha_0 = 0.00001125$ 、 $\alpha_1 = 0.05$  和  $\beta_1 = 0.9$  的 GARCH(1,1) 模型之資產報酬率資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0508 (0.0158)	0.0598 (0.0166)	0.0519 (0.0148)	0.0503** (0.0145)	0.0547 (0.0117)	0.0511 (0.0106)	0.0492* (0.0101)
$\alpha = 0.01$	0.0111 (0.0075)	0.0055 (0.0053)	0.0125 (0.0072)	0.0105* (0.0066)	0.0121 (0.0063)	0.0117 (0.0056)	0.0096** (0.0051)

表九和表十分別為具有轉折點模型之資產報酬率模擬資料下，各種風險值計算方法的穿透率結果，表九為由常態分配轉變為  $T(5)$  分配，而表十為常態分配由一倍標準差到二倍標準差。可以發現無論是資產報酬率分配改變或是其波動率改變，參數型固定波動率模型的風險值計算法都不適用，對於風險值的估計也會因為模型的假設不對而變得相當差。而 HS 法和 HD 法也因市場報酬率的模型突然改變，則未來資產報酬率之分配和過去資產報酬率之分配相同的假設不成立，使得利用過去報酬率的資料並沒有辦法迅速地捕捉到未來資產報酬率的真實分配，使得 HS 法和 HD 法之風險值計算不夠準確。而 EWMA-normal 法雖然對於資產報酬率之波動率有進行調整，但因為資產報酬率之分配不一定為常態分配，其表現有時亦不甚理想。只有 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法表現會較佳，且與最佳之風險值計算法的結果相距不遠，主要

原因為 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法對於資產報酬率波動率有進行調整，且不需假設資產報酬率之分配，因此在市場突然發生劇變，使得報酬率模型改變時，較能精確的計算風險值。

表九 模擬轉折點模型常態分配到  $T(5)$  分配之資產報酬率的資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0450 (0.0116)	0.0515 (0.0122)	0.0485 (0.0110)	0.0469 (0.0107)	0.0516 (0.0113)	0.0502** (0.0095)	0.0486* (0.0095)
$\alpha = 0.01$	0.0157 (0.0069)	0.0106** (0.0058)	0.0143 (0.0057)	0.0120* (0.0053)	0.0195 (0.0074)	0.0151 (0.0055)	0.0125 (0.0051)

表十 模擬轉折點模型一倍標準差到二倍標準差，常態分配之資產報酬率的資料，各風險值計算方法的穿透率

	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.1066 (0.0153)	0.1180 (0.0161)	0.1094 (0.0136)	0.1063 (0.0137)	0.0621 (0.0112)	0.0519* (0.0099)	0.0500** (0.0094)
$\alpha = 0.01$	0.0440 (0.0107)	0.0299 (0.0090)	0.0357 (0.0083)	0.0307 (0.0082)	0.0175 (0.0073)	0.0124* (0.0052)	0.0099** (0.0048)

由以上的模擬結果，可以發現若計算風險值之資產報酬率模型和模擬之模型不同時，參數型固定波動率模型之風險值估計會有相當程度的誤差。而當資產報酬率之波動發生改變時，只有 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法之風險值的計算仍會有不錯的結果。整體而言，EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法在具有各種分配的資產報酬率模擬資料下，其穿透率的表現幾乎都不錯（與宣稱的  $\alpha$  值接近）。而其他的風險值計算法均會在某些情況下，其穿透率的表現會不好。因此，由模擬結果顯示 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法均是表現不錯的風險值計算法。

## 肆 實證研究

本研究的市場實證對象為台灣發行人加權股價指數和美元對台幣匯率的日報酬率資料，前者資料來源為台灣經濟新報資料庫 (TEJ)，後者資料來源為太平洋匯率資料庫 (PACIFIC Exchange Rate Server)。主要的測試期間為由民

國 89 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止共二年的資料，期間共分為二段，第一段期間為民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止，第二段期間為民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止，分別計算各風險值計算方法之穿透率。並且取每段測試期間前 250 筆交易日的資料為訓練期間樣本，以估計各種不同風險值計算方法中之參數，再進行各期間的穿透率測試，以觀察市場實證資料是否和模擬所做的結果相符合。

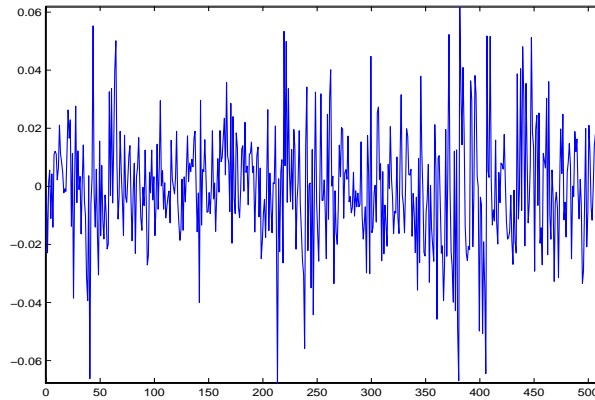
### (一)台灣發行人加權股價指數日報酬率資料

在第一段期間，由表十一中之 Jarque-Bera 值，經過計算得到訓練期和測試期的  $p$ -value 分別為 0 和 0.0932，因此在訓練期的股價指數日報酬率的資料之分配不為常態分配，但在測試期的股價指數日報酬率資料之分配可視為常態分配，亦即日報酬率資料之分配由非常態分態轉變為常態分配的情形。此外，亦可看出訓練期和測試期報酬率資料之分配或是其波動率都有改變，由圖一和圖二亦可看出此現象。此外，由圖一亦可看出報酬率資料有波動聚集的現象。當  $\alpha$  為 0.05 時，由表十二可以看出參數型固定波動率的風險值計算法會因股價指數日報酬率的真實分配和風險值計算法所假設的分配不同，因此表現不甚理想，而 HS 法的表現亦不甚理想。相對而言，由於 EWMA-HD 法能夠較快反應市場的轉變，使風險值的計算上有較佳的結果。而在  $\alpha$  為 0.01 時，由於台灣發行人加權股價指數有上下漲跌幅七個百分點的限制，使得分位數的估計會有較大的誤差，因此較容易高估風險值，而使得 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法的表現不夠理想。

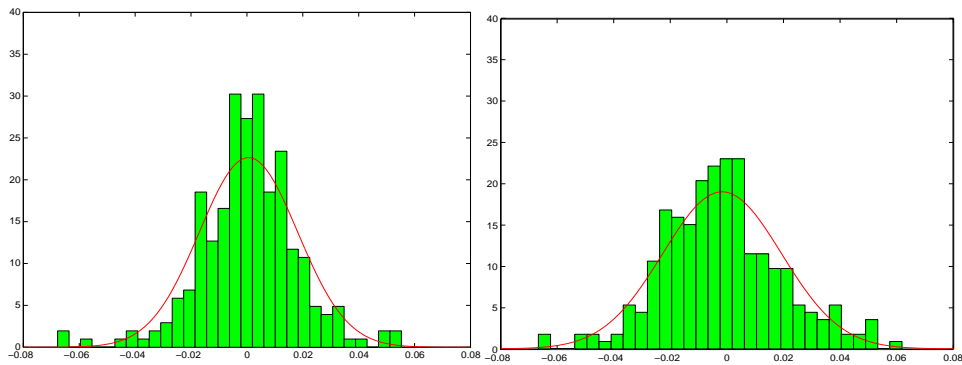
表十一 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之台灣發行人加權股價指數的報酬率資料相關統計量之結果

	訓練期間	測試期間
Mean	0.0006	-0.0019
Standard deviation	0.0176	0.0210
Skewness	-0.2618	0.2197
Kurtosis	4.9998	3.5171
Jarque-Bera	42.8335*	4.7458
Sample size	250	264





圖一 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之台灣發行量加權股價指數的報酬率資料



圖二 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止 (圖右) 和前 250 筆交易日 (圖左) 之台灣發行量加權股價指數的報酬率資料之直方圖

表十二 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止各風險值計算方法的穿透率結果

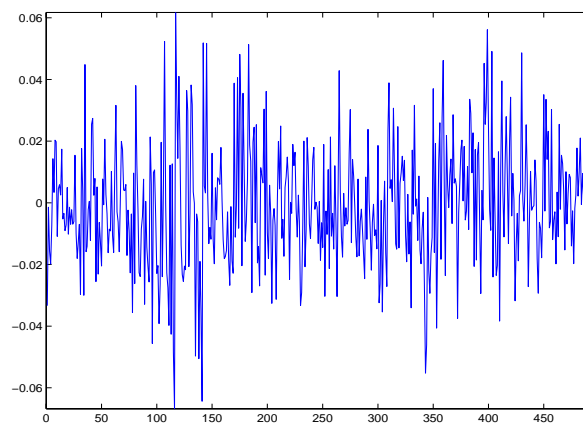
	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0530	0.0568	0.0644	0.0530	0.0606	0.0568	0.0492
$\alpha = 0.01$	0.0227	0.0114	0.0152	0.0076	0.0114	0	0

在第二段期間，由表十三中之 Jarque-Bera 值，經過計算得到訓練期和測試期的  $p$ -value 分別為 0.0780 和 0.4310，因此可知訓練期和測試期之日報酬率分配均未拒絕常態分配的假設，而在偏態和峰態係數都沒有明顯的改變，圖三和圖四亦可看出此現象。此外，由圖三亦可看出報酬率資料有波動聚集的現象。由表十四可以看出 HS 法和 HD 法會較參數型固定波動率模型之風險值計

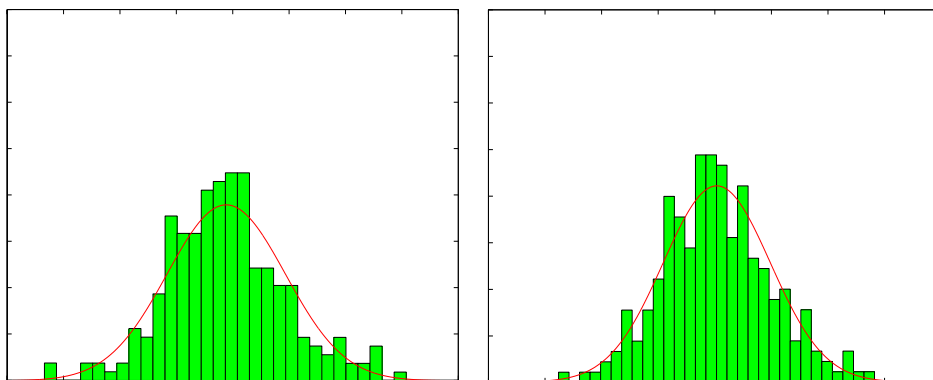
算法好，但配合指數加權移動平均法的 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法表現更好。

表十三 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之台灣發行量加權股價指數的報酬率資料相關統計量之結果

	訓練期間	測試期間
Mean	-0.0022	0.0004
Standard deviation	0.0210	0.0190
Skewness	0.2165	0.2016
Kurtosis	3.5805	3.1012
Jarque-Bera	5.1024	1.6833
Sample size	250	243



圖三 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之台灣發行量加權股價指數的報酬率資料



圖四 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止 (圖右) 和前 250 筆交易日 (圖左) 之台灣發行量加權股價指數的報酬率資料之直方圖

表十四 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止  
各風險值計算方法的穿透率結果

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA -normal 法	EWMA -HS 法	EWMA- HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0288	0.0329	0.0412	0.0370	0.0494	0.0494	0.0453
$\alpha = 0.01$	0.0041	0	0.0041	0	0.0082	0.0082	0.0082

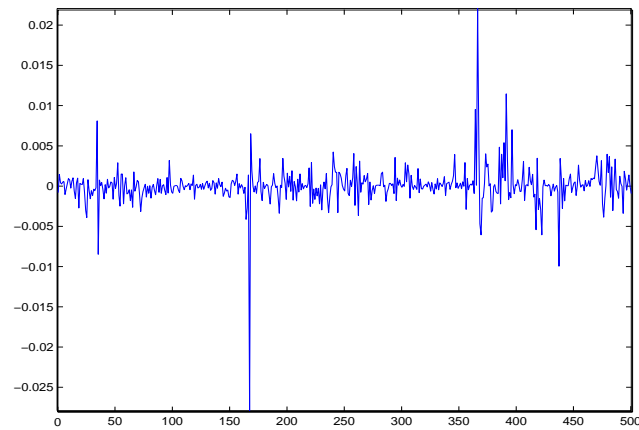
由以上台灣發行量加權股價指數日報酬率的實證結果可以知道當資產報酬率之分配發生改變或是存在波動聚集現象時，EWMA-HS 法或 EWMA-HD 法會有較佳的風險值計算。此外，台灣發行量加權股價指數有上下漲跌幅七個百分點的限制，對風險值計算的影響需進一步探討。

## (二)美元對台幣匯率日報酬率資料

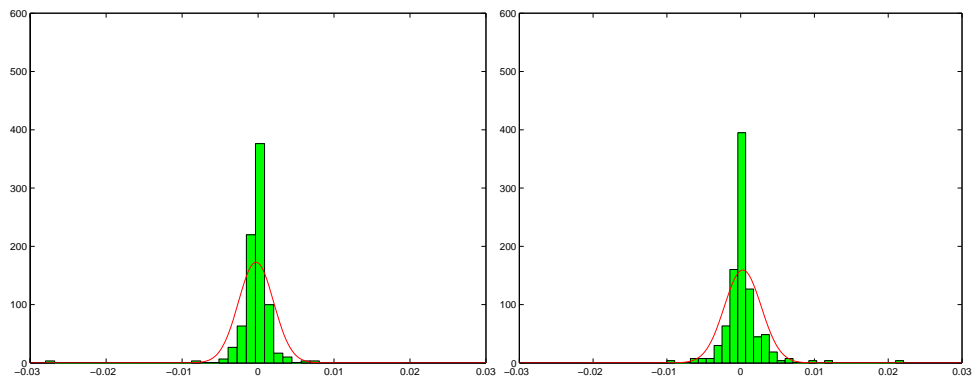
在第一段期間，由表十五中之 Jarque-Bera 值，經過計算其訓練期和測試期的  $p$ -value 亦皆為 0，因此訓練期和測試期日報酬率資料之分配皆不為常態分配。此外，亦可看出日報酬率之波動並沒有相當大的改變，但峰態和偏態則有較大的改變，而由圖五和圖六也可以看出此現象。由表十六可以看出當  $\alpha = 0.05$  時，參數型固定波動率模型之風險值計算法表現相當不佳，其原因可能為訓練期和測試期日報酬率資料之分配皆不為常態分配，使得分位數估計不佳，而 HS 法、HD 法 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法的風險值計算表現均不錯。此外，當  $\alpha = 0.01$  時，HD 法和 EWMA-HD 法的風險值計算的表現亦不錯。

表十五 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之  
美元對台幣匯率的報酬率資料相關統計量之結果

	訓練期間	測試期間
Mean	-0.0003	0.0003
Standard deviation	0.0023	0.0025
Skewness	-6.8331	2.8807
Kurtosis	85.5762	27.8393
Jarque-Bera	71781*	6681.2*
Sample size	250	251



圖五 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之美元對台幣匯率的報酬率資料



圖六 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止 (圖右) 和前 250 筆交易日 (圖左) 之美元對台幣匯率的報酬率資料之直方圖

表十六 自民國 89 年 5 月 1 日至民國 90 年 4 月 30 日止各風險值計算方法的穿透率結果

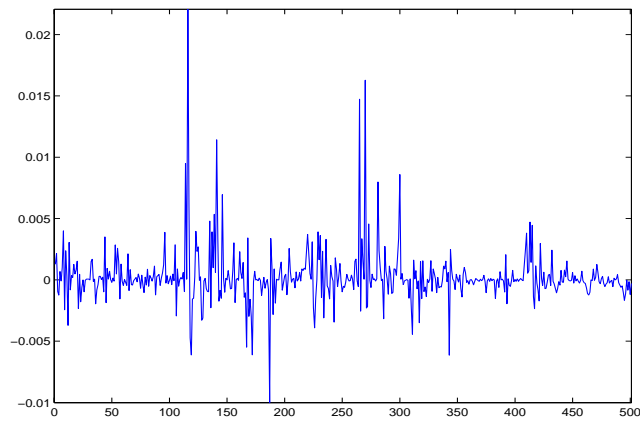
	Normal 法	$T(5)$ 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0239	0.0239	0.0558	0.0558	0.0279	0.0438	0.0438
$\alpha = 0.01$	0.0080	0.0080	0.0199	0.0080	0.0120	0.0199	0.0080

在第二段期間，由表十七中之 Jarque-Bera 值，經過計算其訓練期和測試期的  $p$ -value 亦皆為 0，因此訓練期和測試期日報酬率資料之分配皆不為常態分配，而日報酬率之波動率、偏態和峰態係數皆有些許的改變，由圖七和圖八亦可看出此現象，但由圖七可看出日報酬率具有波動聚集的現象。由表十八可看出參數型固定波動率模型之風險值計算法、HS 法和 HD 法都無法準確估計

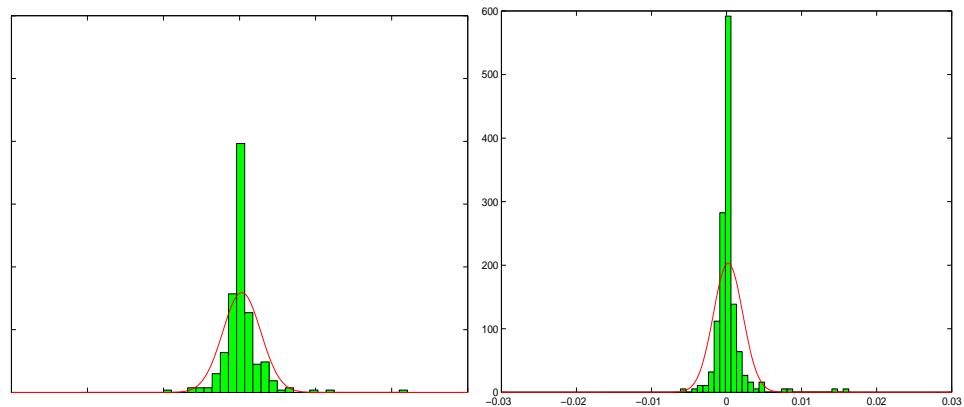
風險值，只有配合具有波動率調整作用的指數加權移動平均法的 EWMA-normal 法、EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法才能較準確的估計風險值。

表十七 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之美元對台幣匯率的報酬率資料相關統計量之結果

	訓練期間	測試期間
Mean	0.0003	0.0002
Standard deviation	0.0025	0.0020
Skewness	2.8731	4.3050
Kurtosis	27.7426	33.6165
Jarque-Bera	6603.2*	10399*
Sample size	250	251



圖七 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止和前 250 筆交易日之美元對台幣匯率的報酬率資料



圖八 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止 (圖右) 和前 250 筆交易日 (圖左) 之美元對台幣匯率的報酬率資料之直方圖

表十八 自民國 90 年 5 月 1 日至民國 91 年 4 月 30 日止各風險值計算方法的穿透率結果

	Normal 法	T(5) 法	HS 法	HD 法	EWMA-normal 法	EWMA-HS 法	EWMA-HD 法
$\alpha = 0.05$	0.0080	0.0080	0.0199	0.0199	0.0438	0.0677	0.0637
$\alpha = 0.01$	0	0	0.0040	0	0.0120	0.0120	0.0080

由以上美元對台幣匯率日報酬率的實證結果，亦可以知道若資產報酬率資料沒有分配和波動的改變現象時，則 HS 法和 HD 法會有較不錯的表現，而 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法的表現亦會不差。但若資產報酬率資料有波動的改變及波動聚集現象時，則以 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法會有較穩定的表現，而參數型固定波動率模型之風險值計算法、HS 法的和 HD 法的表現則不理想。

## 伍 結論和討論

在考慮該使用何種方法來計算風險值時，使用參數型固定波動率模型之風險值計算法，通常會具有相當大的誤差，因為資產報酬率的真實分配並不容易知道，若冒然使用某種分配，則在計算風險值時，便可能會因分配的假設錯誤而產生相當程度的誤差。此外，由模擬結果和市場實證結果也可看出歷史模擬法在風險值的計算上的確比參數型固定波動率模型之風險值計算法更具穩健性。

此外，為了捕捉市場資料可能發生波動改變或波動聚集的現象，RiskMetrics 曾使用 EWMA-normal 法計算風險值，但由於 EWMA-normal 法是建構在報酬率具有常態分配的假設下，故 EWMA-normal 法只有在報酬率分配為常態分配時，風險值的計算才會準確，否則此法的表現並不理想。因此可將 EWMA 配合 HS 法或 HD 法來計算風險值。由於影響風險值估計準確與否的主要關鍵有二：一是資產報酬率分配之分位數是否能準確估計，二是資產報酬率之波動率是否能準確估計。而 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法因為使用了指數加權移動平均的概念，可以較及時地反應資產報酬率波動的變化，再加上 HS 法或 HD 法可以得到一個較不易受資產報酬率分配影響的風險值計算，因此 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法是較佳的風險值計算法。而由模擬結果和市場實證結果，亦驗證了此觀點。

整體而言，在一般情況時，HS 法、HD 法、EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法都提供了一個簡單又不錯的風險值計算方法。但若資產報酬率分配或波動發生改變及有波動聚集現象時，只有 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法是最值得參考的風險值計算法。

本文雖然得到 EWMA-HS 法和 EWMA-HD 法是不錯之風險值計算法的結論，但仍有一些問題尚待解決，值得進一步探討，包括：

1. 由目前資產報酬率的模型發展觀之，已經有相當多種的參數型估計模式可以捕捉金融資產報酬率分配的厚尾現象，本文僅產生雙重指數分配、雙重柏拉圖分配和穩定分配之模擬資料，如此可能會排除了其他可能的厚尾分配，因此未來可再考慮其他具有厚尾性質的分配，如廣義誤差分配 (generalized error distribution)、NIG 分配 (normal inverse Gaussian distribution) 和 Hyperbolic 分配等。
2. 本文中的  $T$  分配模型之風險值計算法，均假設  $T$  分配之自由度為 5，並未進行參數的估計，故有可能自由度為 5 的  $T$  分配無法描述資產報酬率資料的厚尾現象。因此未來可以利用最大概似估計法 (maximum likelihood method) 來估計  $T$  分配的自由度，如此應可較精確的描述資產報酬率之分配及其分位數，並得到較精確的風險值。
3. 本文中，無論是 EWMA-normal 法、EWMA-HS 法或 EWMA-HD 法中之  $\hat{\lambda}$  均取用 Riskmetrics 中所建議 0.94。是否可以針對不同期間或不同性質之資產，使用不同的最佳  $\hat{\lambda}$  值，而使得風險值的計算更準確，值得進一步研究。
4. 事實上，EWMA 法之變異數函數可視為 GARCH(1,1) 模型之變異數函數的一個特例，因此，可以考慮更一般的 GARCH 模型配合 HS 法或 HD 法計算風險值，應可得到更精確的風險值。
5. 為方便起見，本文僅採用「穿透率」作為評比準則，未來可以再增加其他的評比標準，如 LR 檢定 (參考 Kupiec (1995)) 和誤差效度 (參考洪明欽、王德仁 (2001)) 等，如此更能客觀評估各風險值計算方法之優劣。
6. 在第四節實證研究中，由於台灣發行量加權股價指數有上下漲跌幅七個百分點的限制，使得當  $\alpha = 0.01$  時，有時會高估風險值，如何較精確計算風險值，需要進一步探討。

## 參考文獻

- 洪明欽、王德仁，「台股加權指數風險值評估—分位數迴歸法之探討」，*東吳經濟商學學報*，第 33 期，2001 年，頁 19-38。
- Bollerslev, T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, (31), 1986, pp.307-327.
- Chen, J. and Gupta, A.K., "Testing and Locating Variance Change-point with Application to Stock Prices", *Journal of the American Statistical Association*, (92), 1997, pp.739-747.
- Dowd, K., "Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management", New York: Wiley, 1998.
- Duffie, D and Pan, J., "An Overview of Value at Risk", *The Journal of Derivatives*, (7), 1997, pp.7-49.
- Hamilton, J.D., "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", *Econometrica*, (57), 1989, pp.27-39.
- Hamilton, J.D., "A quasi-Bayesian Approach to Estimating Parameters for Mixtures of Normal Distributions", *Journal of Business and Economic Statistics*, (9), 1991, pp.27-39.
- Hamilton, J.D., "Time Series Analysis", Princeton Univ. Press, 1994.
- Harrell, F.E. and Davis, C.E., "A New Distribution-free Quantile Estimator", *Biometrika*, (69), 1982, pp.635-640.
- Hsieh, D.A., "The Statistical Properties of Daily Foreign Exchange Rates: 1974 – 1983", *Journal of International Economics*, (24), 1988, pp.129-145.
- Hull, J. and White, A., "Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed", *The Journal of Derivatives*, (5), 1998, pp.9-19.
- Jorion, P., "Value at Risk - The New Benchmark for Controlling Market Risk", New York: McGraw-Hill, 2000.
- Kupiec, P.H., "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models", *The Journal of Derivatives*, (3), 1995, pp.73-84.
- Linden, M., "A Model for Stock Return Distribution", *International Journal of Finance and Economics*, (6), 2001, pp.159-169.
- McCulloch, J.H., "Financial Applications of Stable Distribution", In *Handbook of Statistics, Vol. 14*, S. G.S. Maddala and C.R. Rao Eds, New York: Elsevier Science, 1996, pp.393-425.
- Meese, R.A., "Testing for Bubbles in Exchange Markets: a Case of Sparkling Rates", *Journal of Political Economy*, (94), 1986, pp.345-373.
- Morgan, J.P., "RiskMetrics™", Technical Document, fourth edition, New York, 1996.
- Ridder, T., "Basics of Statistical VaR-estimation", In *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks*, G. Bol, G. Nakhaeigaded and K.H. Vollmer Eds, Heidelberg: Physica-Verlag, 1997, pp.161-187.



# The Impact of Asset Return Distributions on Value-at-Risk

YI-PING CHANG, MING-CHIN HUNG, CHE-HUNG CHEN

*Department of Business mathematics, Soochow University*

## ABSTRACT

Since the Capital Adequacy Directive of BIS suggest a bank to maintain risk capital adequate to cover its future possible losses by using Value-at-Risk (VaR) over a ten-day holding period on 99% of confidence level, VaR has become a popular measure used in financial risk management and a wide variety of VaR estimating models are available. It is interested to know that the impact of different return distributions on the VaR estimation.

In this paper, we simulate asset returns data from various distributions, including normal, t, double exponential, double Pareto, stable distribution, mixture normal, Markov-switching, GARCH(1,1), and changepoint model. Then we estimate the VaR via various methods, including constant volatility, historical simulation, HD, EWMA, EWMA-HS and EWMA-HD methods. It can be shown that, through simulation, when the assumed distribution of asset return is different from the true one, the estimation of VaR through constant volatility method does not work well. When the asset return change dramatically, such as the occurrence of Asian financial crisis, we find that the estimations of EWMA-HS and EWMA-HD methods perform best due to its ability to adjust distribution (quantile) as well as time-varying volatility together. This result supports the potential use of EWMA with empirical quantile instead of the normal quantile used in Riskmetrics.

**Keywords:** Value-at-Risk, constant volatility model, historical simulation method, EWMA method, EWMA-HS method, EWMA-HD method

