輔仁管理評論

中華民國 93 年 9 月，第十一卷第二期，169-182

# 可加性壽命分布對不可維修產品最適動態定價及保固期決策影響之比較

林珮珺*

(收稿日期：92 年 6 月 11 日；第一次修正：92 年 8 月 5 日；
第二次修正：92 年 9 月 1 日；接受刊登日期：92 年 9 月 15 日)

## 摘要

本文以價格及產品保固為決策變數，發展一利潤最大模式，生產者可依據結論，在產品生命週期的不同時點，對價格及保固期作出最適的動態決策。假設當失效發生時，生產者提供消費者，在保固期內可免費更新產品。為符合廠商實際的運作情況，不再將更新後產品，重新設定相同的保固期。本研究採用更新產品的保固期，呈遞減狀態之策略：當發生產品連續失效，累加壽命未超出保固期時，生產者才提供免費更新。主要探索產品壽命服從可加性分布，對動態定價、及保固期決策可能造成的影響。首先，依據更新過程推導出期望更新次數的一般化公式，利用數值分析，計算期望更新次數，以評估提供保固之生產成本；並探討在產品生命週期內，累積銷售量為產品需求的狀態變數下，為求最大利潤，生產者如何應用最佳化控制理論以控制價格及保固期兩變數。在可分離之對數成長需求函數的設定下，本研究得出最適的控制策略為將價格與保固同時提高或降低，但不應作相反方向的變動。

關鍵詞彙：產品保固，免費更新，動態定價，更新過程，最佳化控制理論

## 壹．前言

生產者經營目的在於獲利，提高銷售量是創造利潤來源的方法。消費者對一般財貨 (非 Giffen goods) 的偏好顯示：較高的訂價會降低其銷售量；較低的訂價雖可提高銷售量，但同時也降低了單位利潤。因此生產者必須訂定合適的價格，以刺激消費者的購買意願，並獲得最大利潤。除銷售價格外，消費者購買產品時也重視產品品質，但是品質無法完全從產品外觀表現出來。保固乃生產者評估本身產品品質的實力後，所提供的產品保證。消費者可藉由生產者所提供的產品保固，來預估品質的良窳。此外，不同生產者 (豐田、本田汽車) 可能對〝相同〞的產品 (1600CC 房車)，提供不同程度的產品保固，產品保固也是一項用來擴大市場佔有率的行銷利器。不同生產者、甚至不同零件之產品可靠度都有差異，可靠度的高低會影響成本。若產品發生故障時，生產者

* 作者簡介：林珮珺，國立高雄第一科技大學資訊管理系助理教授。

* 本研究承蒙行政院國家科學委員會補助(NSC 91-2213-E-327-011)。謹此致謝。

允諾提供維修或更新的服務，由於維修及更新都需要成本，因此生產者承諾的保固期長度、及產品本身的可靠度，將對成本產生決定性的影響（楊宗豫，1995)。

價格和保固兩項指標強烈影響消費者對產品的認知，進而影響購買的意願。許多生產者過於強調產品的多功能、多樣化、高品質等，卻忽略掉因應可能的變動，以適時對產品價格、和保固期做出適當的調整。特別是經濟環境隨時在改變，產品生命週期有愈來愈短的趨勢，競爭對手更是不定時地推出新產品，因此生產者必須在產品生命週期的每一時點，訂定適當的策略，刺激銷售量，以期達成生產者的最大利潤。產品的生命週期是從該產品試製成功並投入市場開始，直到被市場淘汰，生產者停止生產該產品的全部持續時間。分析產品的生命週期，即時了解產品處在生命週期的哪個階段，可以為生產者經營決策提供重要資訊。一般來說，反映產品生命週期各階段特徵的因素主要有銷售量、成本與價格。從目前電腦產品上市後三個月一個週期的例子看來，如何透過提供合適的保固期及價格，提高銷售、反應成本，以面對產品的階段性變化，將是一個非常重要的問題。

本研究主要以價格及保固作為決策因子，動態地影響消費者的需求。價格的訂定不能因過高而使消費者放棄購買，又必須根據成本以產生最大利潤。保固的長度及策略種類繁多，本研究將保固策略限定為保固期內免費更新，原因是現階段許多產品，生產者對於維修感到浪費時間，或人工修理超出更新產品的成本。保固策略的調整限制在保固期的長度。有關更新產品的研究，若假設更換新產品後恢復保固期，雖然在數學上具有推導的優勢，但並不符合實際作業的情況。因此本研究探討生產者更新產品後，新的保固期必須扣掉前一個產品被使用的時間，一旦連續產品的壽命總和，超出原始的保固期，則終止更新的服務。並討論累積銷售量也是需求量的狀態變數下，為求最大利潤，廠商應如何控制價格及保固期兩變數。具體研究目的包括：

1.探討服從可加性壽命分布 (Exponential; Normal; Gamma) 的產品，在隨機的失效情況下，生產者提供不同保固長度的期望成本。

2.分析產品生命週期內因應不同市場需求特性（擴張、飽和)，如何訂定動態價格與保固期以產生最大利潤。

# 貳．文獻探討

本研究首先對選擇價格、及保固為決策變數的理由作一陳述，再詳細介紹生產者利潤最大模型，並對動態最佳化相關文獻進行分析整理。

## 一、價格

價格即產品所標示的售價。產品的一項外部線索，是消費者最容易且直接接觸到的外部刺激。廣義的價格是指：消費者為了購買某項產品所必須花費的時間與金錢，也就是說，消費者為了購買某一產品，除了必須支付實際價格之外，還必須花費時間尋找有關產品的資訊，以降低不必要的風險等。

Scitovszky (1945) 認為價格是由市場上供給與需求的力量所決定的。由於市場上的供給與需求這兩股力量的衝擊，同類產品的生產者必須以價格競爭，來爭取產品在消費者心目中的地位。產品的價格越高，代表產品在消費者心中的排名越高，產品的品質越好，產品價格與品質成正相關，消費者自然而然地將產品價格視為判定產品品質的指標之一。

高價格會讓消費者相信產品具有高品質，因為消費者認為生產高品質的產品，生產成本一定比較高，而成本很自然就反應在高價格上。雖然產品價格高並不一定表示產品的品質高，但在消費者缺乏足夠的產品訊息以評估產品品質時，或者根本就沒有動機分析完整的產品資訊時，通常會利用產品的價格線索，來形成對於此產品的態度，因此對生產者而言價格是一項重要的決策變數。

## 二、保固

產品保固不但可以降低消費者購買的風險，還可以保護生產者免於遭受到不合理的要求。過去產品保固對生產者而言是責任，現在則不僅是責任，還是一項用來與競爭對手有所區別的行銷利器。生產者可依不同的顧客性質、銷售情形及市場狀況，對同一產品提供不同的產品保固。

賴家森 (1995) 以組合音響為例，探討價格、品牌名稱、產品保固等外部線索，對消費者作產品評估時的影響。其研究結果顯示：其他條件不變的情況下，若生產者提供產品保固，不論保固期長短，消費者的品質認知、價值認知與購買意願，都會高出生產者沒有提供產品保固的情況。即產品保固確實影響了消費者的品質認知、價值認知與購買意願。

Boulding & Kirmani (1993) 利用經濟學的信號理論探討消費者對產品保固的認知。作者認為在資訊不對稱的市場，買方與賣方所擁有的訊息不對等，於交易完成前，賣方比買方更瞭解產品或服務的品質，買方會儘可能地蒐尋資訊，以區別高品質及低品質的生產者。生產者為解決資訊不對稱的問題，必須在消費者作購買決策前，提供有關產品或服務品質的資訊。其研究結果顯示，消費者認為產品保固為產品品質的一項訊息。

保固期長度對生產者利潤產生直接影響。保固期太短使消費者對產品品質不具信心；保固期太長則造成生產者成本過高。制定保固策略時，除了將影響消費者購買行為的相關因素納入考量外，還需依據產品本身的可靠度。Menezes & Currim (1992) 認為保固長度的決定對生產者相當重要，但也是一項很難訂定的決策。Padmanabhan (1993) 則認為保固長度是一項重要的行銷工具，經常被生產者當作行銷的手法。Moskowitz & Chun (1994) 提出有關保固的分析研究中，保固期及提供保固的價格，是兩個重要的決策變數。Agrawal (1996) 之研究報告中發現產品保固與其可靠度具以下三種關係：

1.產品在市場上的擴張率越高時，產品保固與產品可靠度間的正向關係就會越強。產品的市場擴張率越高，表示消費者可以接收到越多可靠度資訊，可靠度低的產品無法就提供比較好的產品保固來吸引消費者。

2.產品保固是生產者的責任之一。若產品發生故障，生產者須負責維修成本，故可靠度差的生產者，不太可能提供高品質的產品保固；而產品可靠度越高的生產者，越可能提供品質好的產品保固以吸引消費者。

3.產品越成熟，產品保固與產品可靠度之間正向關係越強。產品在生命週期的的前半段時，生產者為了取得市場佔有率，會提供條件很好的產品保固與對手競爭。若消費者對此產品瞭解不深入，就無法透過產品保固來判定產品是否可靠。當產品越趨於成熟時，消費者資訊越多，越有可能瞭解此一產品。消費者資訊來源包括經驗人士的口耳相傳，公開發行的消費者報導等。因此可靠度差的產品，不太可能提供好的產品保固來欺騙消費者。

## 三、生產者利潤極大化模型

G1ickman & Berger (1976) 發展包含保固期長度、及價格兩決策變數的利潤極大化模式。其研究假設為失效隨機發生，且修理成本固定；產品需求隨價

格的增加，呈現指數的遞減狀態，而隨著保固期的增加呈現指數的遞增狀態。消費者的需求函數定義如下：

$$q(p,w)=k_1 p^{-a}(w+k_2)^b$$

其中

$k_1$：**振幅因子 (常數)，** $k_1>0$

$k_2$：**移動因子 (常數)，** $k_2\geq 0$**，可使保固** $w=0$**時，需求不為零**

$a$：**價格彈性，** $a\geq 0$

$b$：**保固期彈性，** $0<b<1$

生產者之利潤最大的目標函數在價格為 $p$ 、保固期為 $w$ 時如下：

$$\pi(p,w)=[p-c\cdot(1+M(w))]q(p,w)$$

其中

$c$：**單位成本**

$M(w)$：**在保固長度為** $w$ **下的期望更新次數**

Teng & Thompson (1996) 研究寡占市場導入新產品時，在生產成本隨學習曲線呈遞減的狀態下，生產者如何動態地調整單位價格及品質水準，以達成利潤極大。假設動態的消費者需求與價格、品質、累積銷售量有關。探討價格與品質策略受市場需求特性 (擴張、飽和) 的影響。對於目標函數採用一般式加以探討，並可代入特定需求函數，了解最適的價格與品質策略。該研究作出以下三個最適動態價格、品質策略：(1)最適價格與品質同時降低；(2)最適價格降低但最適品質提昇；(3)最適價格與品質同時提昇。

G1ickman & Berger (1976) 所提模式，在推導期望修理次數時，乃假設故障的間隔時間服從 Gamma 分布，並決定唯一的最適價格與保固期，本研究將產品壽命擴充為服從其他可加性分布，並探討最適動態價格、保固期策略，與不同產品壽命分布的相關性。Teng & Thompson (1996) 的模式則以品質及價格作為決策變數，與本研究所規劃的保固與價格變數不同。本研究引用兩模式的內容，將品質變數更換為保固期，並針對可加性的壽命分布，以更新過程推

導期望更新次數，瞭解如何於產品生命週期的不同時點，訂定最適保固期及價格，以達成生產者的最大利潤。

## 參．模式建立

本研究以動態價格及產品保固作為決策變數，發展生產者的利潤最大模式，提供生產者於不同時間點作為訂定價格與保固期的依據。同時引用 G1ickman & Berger (1976) 及 Teng & Thompson (1996) 發表的模式，探討生產者的最大利潤，受到不同產品壽命分布影響的情形。首先建立數學模式，為方便說明及推導，基本假設與模式中所使用的參數、變數定義如下：

$T$ ：**預設的產品生命週期**

$r$ ：**折現率**

$p(t)$ ：**產品於時點 $t$ 的單位價格 (決策變數)**

$w(t)$ ：**生產者於時點 $t$ 提供的保固期 (決策變數)**

$Q(t)$ ：**至時點 $t$ 的累積銷售量**

$c(w(t))$：**生產者提供的保固 $w(t)$ 的單位成本**

$f(p,w,Q)$：**$t$ 時點的銷售率，為價格、保固、及累積銷售量的函數**

若生產者依據產品規劃的生命週期，預先求取利潤最大化，目標函數如下：

$$\underset{p(t),w(t)}{Max} \quad J = \int_0^T e^{-rt}\left[p(t) - c(w(t))\right] f(p,w,Q)\,dt$$

**subject to**

$$\frac{dQ(t)}{dt} = f(p,w,Q)$$

建立最大利潤模式後依最佳化控制理論求解。首先利用漢彌耳頓 (Hamiltonian) 函數將數學模式轉為當下值 (current value)：

$$H = \left[p(t) - c(w(t)) + \alpha(t)\right] f\left(p(t), w(t), Q(t)\right) \qquad \textbf{(1)}$$

其中 $\alpha(t)$ 滿足下列微分方程

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = r\alpha(t) - H_Q = r\alpha - (p - c + \alpha) f_Q \tag{2}$$

且當 $t = T$ 時, $\alpha(t)$ 為 0。變數的右下標代表變數對該下標的偏導數。利用赫辛 (Hessian) 矩陣得最佳化結果，必須滿足下列等式：

$$H_p = 0 \Rightarrow [p - c(w) + \alpha] \cdot f_p + f = 0 \tag{3}$$

$$H_w = 0 \Rightarrow -c_w \cdot f + [p - c(w) + \alpha] \cdot f_w = 0 \tag{4}$$

以及二階導數條件：

$$H_{pp} < 0 \Rightarrow 2 f_p - (\frac{f}{f_p}) f_{pp} < 0 \text{，} \tag{5}$$

$$H_{ww} < 0 \Rightarrow -c_{ww} f - 2c_w f_w + (\frac{c_w \cdot f}{f_w}) f_{ww} < 0 \text{，} \tag{6}$$

$$H_{pp} H_{ww} - (H_{pw})^2 > 0 \tag{7}$$

由以上推導可發現，欲得出臨界點 (critical point) 及確認其是否滿足二階導數的條件，必須先知道生產者提供保固的成本 $c(w)$、成本對保固期的一階導數及二階導數（$c_w$、$c_{ww}$）等數值之正負關係。本研究所探討的保固成本，將確實反映產品實際的壽命與更新次數，故 $c(w)$ 為單位生產成本 $c$ 及保固長度 $w$ 的函數。本文中令 $c(w) = c \cdot (1 + M(w))$。與 Teng & Thompson (1996) 不同處除了以保固期變數取代品質外，本研究不假設成本對保固期之一階導數、二階導數恆為正數（$c_w > 0$、$c_{ww} > 0$）。

本文接著引用 Blischke & Scheuer (1975) 推導服從可加性分布下的期望更新次數，以進一步計算提供保固後的單位生產成本。所使用符號定義如下：

$X_1, X_2 \ldots$ ：為隨機變數，表連續產品的壽命，獨立、且服從同一個分布

$F(\cdot)$ ：為隨機變數小於或等於·的機率，即累積分布函數

$P(A)$ ：為事件 **A** 發生的機率

$S_n$ ：$n$ 個連續產品的壽命和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S_0 = 0$$

$N(w)$：為產品保固期為 $w$ 下之更新次數 $= \max\{n : S_n \le w\}$

$M(w)$：產品保固期為 $w$ 下之期望更新次數或稱更新函數

$$M(w) = E[N(w)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(N(w) = n)$$
$$= F_1(w) + F_2(w) + \text{K}$$

其中 $F_n(\cdot)$ 為 $F(\cdot)$ 的 $n$ 次折積 (n-fold convolution)。

當產品壽命服從失效率為 $\lambda$ 的指數 (Exponential) 分布時， $n$ 個連續產品的壽命和則服從參數為 $n$ 及 $\lambda$ 的 Gamma 分布

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \lambda)$$

其更新函數、更新函數的一階導數、二階導數公式如下：

$$M(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^w \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \text{；} \qquad M'(w) = \lambda \text{；} \qquad M''(w) = 0$$

當產品壽命服從期望值為 $\mu$, 變異數為 $\sigma^2$ 之常態 (Normal) 分布時, $n$ 個連續產品的壽命和則服從參數為 $n\mu$ 及 $n\sigma^2$ 的常態分布

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

其更新函數、更新函數的一階導數、二階導數公式如下：

$$M(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^w \frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} dx \text{；} \qquad M'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{\left(-1/2 \frac{(-w+n\mu)^2}{n\sigma^2}\right)}}{\sigma\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \right)$$

$$M''(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}(-w+n\mu) e^{\left(-1/2 \frac{(-w+n\mu)^2}{n\sigma^2}\right)}}{\sigma^3 \sqrt{\pi}\, n \sqrt{n}} \right)$$

當產品壽命服從尺度 (scale) 參數為$\lambda$、及形狀 (shape) 參數$\alpha$的 Gamma 分布時，$n$個連續產品的壽命和服從參數為$n\alpha$及$\lambda$的 Gamma 分布

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathbf{Gamma}\left(n\alpha, \lambda\right)$$

其更新函數、更新函數的一階導數、二階導數公式如下：

$$M\left(w\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{w} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\left(\lambda x\right)^{n\alpha-1}}{\left(n\alpha-1\right)!} dx \text{ ；}$$

$$M^{'}\left(w\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda w}\left(\lambda w\right)^{n\alpha}}{w\Gamma\left(n,\alpha\right)} \text{ ；}$$

$$M^{''}\left(w\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\lambda^2 e^{-\lambda w}\left(\lambda w\right)^{(n\alpha-1)}}{\left(n\alpha-1\right)!} + \frac{\lambda e^{-\lambda w}\left(\lambda w\right)^{n\alpha-1}\left(n\alpha-1\right)}{w\left(n\alpha-1\right)!} \right]$$

將數值代入各分佈之$M(w)$、$M'(w)$與$M''(w)$公式可發現，在單位製造成本為常數$c$的條件下，三種可加性分布之期望更新次數對保固期的一階導數恆大於 0，表示保固期的增加將使加入保固後的單位總成本提高。對常態及 Gamma 分布，期望更新次數對保固期的二階導數則可能大於 0 或小於 0，代表較長的保固期下再增加保固的成本不一定恆大於保固期較短的情況。本研究將三種分布之期望更新次數、期望更新次數對保固期之一階導數、二階導數彙整如表一：

表一　壽命分布與期望更新次數、一階導數、二階導數

| 壽命分布 | 期望更新次數 | 期望更新次數之一階導數 | 期望更新次數之二階導數 |
|---|---|---|---|
| Exponential | $M(w) > 0$ | $\frac{dM(w)}{dw} = \lambda$ | $\frac{d^2M(w)}{dw^2} = 0$ |
| Normal | $M(w) > 0$ | $\frac{dM(w)}{dw} > 0$ | $\frac{d^2M(w)}{dw^2} > 0$ or $\frac{d^2M(w)}{dw^2} < 0$ |
| Gamma | $M(w) > 0$ | $\frac{dM(w)}{dw} > 0$ | $\frac{d^2M(w)}{dw^2} > 0$ or $\frac{d^2M(w)}{dw^2} < 0$ |

# 肆・需求函數

典型的產品生命週期可分為投入期、成長期、成熟期、與衰退期四個階段，為描述呈現 S 型曲線的生命週期，本研究結合 G1ickman & Berger (1976) 之需求函數，並引用累積銷售量可分離的對數成長 (logistic growth) 需求函數 (Berresford & Rockett, 2000)， $f = k_1 p^{-a}(w+k_2)^b Q(\overline{M}-Q)$，其中 $\overline{M}$ 為市場飽和狀況下的需求量。首先由公式(1)至(7)中，求取最適價格與保固期之時間導數，得出：

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d_1 H_{ww} - d_3 H_{pw}}{D} \;; \qquad \frac{dw(t)}{dt} = \frac{d_3 H_{pp} - d_1 H_{wp}}{D}$$

其中

$$d_1 = -r\alpha f_p - 2f \cdot f_Q + f_{pQ} \cdot f^2 / f_p$$

$$d_2 = f^2 \cdot \left(f_{wQ} \cdot f_p - f_{pQ} f_w\right) / f_p^2$$

$$d_3 = d_2 - c_w d_1$$

$$D = H_{pp} H_{ww} - \left(H_{pw}\right)^2 > 0$$

代入需求函數後，最適價格及保固期對時間之微分如下：

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{f\left(\frac{r\,\alpha\,a}{p} - f_Q\right)\left(-\frac{c_w f_w}{b} - c_{ww} f\right)}{\mathrm{D}} = \frac{f\left(\frac{r\,\alpha\,a}{p} - f_Q\right)(H_{ww} + c_w H_{pw})}{\mathrm{D}}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = f\left(\frac{r\,\alpha\,a}{p} - f_Q\right)\left(-\frac{c_w(1-a)f}{p} - f_w\right) = -\frac{f\left(\frac{r\,\alpha\,a}{p} - f_Q\right)(H_{wp} + c_w H_{pp})}{\mathrm{D}}$$

根據 Teng & Thompson (1996) 所推導之引理 1、2、3，本研究歸納出下列三種不同的狀況：

1.若 $H_{ww} + c_w H_{pw} > 0$，則 $H_{pw} > 0$，且 $H_{wp} + c_w H_{pp} < 0$

2.若 $H_{wp} + c_w H_{pp} > 0$，則 $H_{pw} > 0$，且 $H_{ww} + c_w H_{pw} < 0$

3.若 $H_{pw} = H_{wp} < 0$，則 $H_{wp} + c_w H_{pp} < 0$，且 $H_{ww} + c_w H_{pw} < 0$

表二彙整出市場於飽和、擴張的特性下，針對上述三種不同的狀況，調整價格與保固期的最適策略。

表二　考慮三種狀況與市場特性下，調整價格與保固期的最適策略

| | 條件 | $\overline{M}-2Q>\dfrac{r\alpha(a/p)}{k_1p^{-a}(w+k_2)^b}$ | $\overline{M}-2Q<\dfrac{r\alpha(a/p)}{k_1p^{-a}(w+k_2)^b}$ |
|---|---|---|---|
| 狀況 1 | $H_{ww}+c_wH_{pw}>0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}<0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}<0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}>0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}>0$ |
| 狀況 2 | $H_{wp}+c_wH_{pp}>0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}>0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}>0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}<0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}<0$ |
| 狀況 3 | $H_{pw}=H_{wp}<0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}>0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}<0$ | $\dfrac{dp(t)}{dt}<0$ 且 $\dfrac{dw(t)}{dt}>0$ |

狀況 1 與狀況 2 推導出 $H_{pw}>0$，表示可透過同時提高 (降低) 價格與保固期而提高總利潤，因此價格與保固期應循同方向作調整。狀況 3 指出生產者應以相反方向調整價格與保固期。以下，本文以指數分布說明如何推導出最適的價格與保固策略。由於

$$H_{ww}+c_wH_{pw}=f\cdot(-c_{ww})+f\cdot\left(f_{pw}f_w-f_{ww}f_p\right)/f_p^2=-\frac{c_wf_w}{b}-c_{ww}f$$

在 $k_1>0$， $k_2\geq 0$， $a\geq 0$， $0<b<1$，及指數分布的條件下， $c_{ww}=0$，故

$$-\frac{c_wf_w}{b}-c_{ww}f<0$$

與狀況 1 不相符。又因 $f_pf_w=f_{pw}f$，得出

$$H_{pw}=H_{wp}=\left(2f_pf_w-f_{pw}f\right)/f_p=f_w>0$$

與狀況 3 也不相符。 僅狀況 2

$$H_{wp}+c_wH_{pp}=\frac{c_w(1-a)f}{p}+f_w=-\frac{f_w\cdot f}{p\cdot f_p}>0$$

因此當產品壽命服從指數分布時，在 $\overline{M}-2Q>\dfrac{r\alpha(a/p)}{k_1 p^{-a}(w+k_2)^b}$ 的條件下，最適策略為同時提高價格與保固期；反之當 $\overline{M}-2Q<\dfrac{r\alpha(a/p)}{k_1 p^{-a}(w+k_2)^b}$，最適策略則為同時降低價格與保固期。

在本研究代入累積銷售量可分離的對數成長需求函數下，若產品服從常態、Gamma 壽命分布，因 $H_{pw}=H_{wp}$ 恆為正數，狀況 3 不相符，表示最適的策略下不應將價格與保固作相反方向的調整。

# 伍．結論

本研究修改 Teng & Thompson (1996) 的模式，將品質變數以保固變數取代，以價格、保固期長度為決策變數，建立生產者的最大利潤模式。首先，已知產品的壽命分布，計算某個保固期長度下的期望更新次數，得出生產者提供保固的總單位成本。在 Teng & Thompson (1996) 的模式中，作者令成本對任何品質水準的一階導數、二階導數恆大於 0，本文由數值分析中則發現成本對保固期的二階導數並非恆正。在計算出期望更新次數數值後，可對最適的動態產品價格與保固期作出分析。研究結果顯示，若產品壽命服從可加性的指數分布，當市場仍處於擴張狀態下，最適策略為同時提高價格與保固期；當市場逐漸萎縮時，最適策略則為同時降低價格與保固期。若產品壽命服從指數分布以外的可加性分布，最適策略為依據市場狀況將價格與保固期作同方向調整，應調降或提高則需視兩變數對總利潤的影響孰大以及當下市場的狀況而定。可確知設定在累積銷售量可分離的對數成長需求函數下，將價格與保固期作相反方向調整並非最適策略。Teng & Thompson (1996) 文中對一般式提出三種可能的最適策略包含：最適價格降低但最適品質提昇，本研究針對價格、保固決策變數，並未得到最適價格降低但最適保固提昇之結果，原因即在於本研究未假設成本對保固期之一階導數、二階導數恆為正數，僅產生以下兩個最適動態價格、保固策略：(1)最適價格與保固同時降低；(2)最適價格與保固同時提高。

本文中將產品的單位生產成本設定為常數，未來研究則可討論具學習效果的生產成本，使單位生產成本隨累積生產量遞減。若產品銷售率與飽和需求減去累積銷售量的差成比例，則可代入受限成長需求函數 (limited growth demand function)，再依據上述推導，得出最適的動態定價與保固期策略。

# 參考文獻

楊宗豫, 「保固策略之風險分析—不可維修產品的比較研究」, 國立台灣工業技術學院管理技術研究所工業管理學系碩士論文, 1995 年。

賴家森, 「價格、品牌名稱、產品保固等外部線索對消費者產品評估的影響—以組合音響產品為例」, 交通大學管理科學研究所碩士論文, 1994 年。

Agrawal, J., "The relationship between warranty and product reliability", *The Journal of Consumer Affairs, Madison*, 30(2), 1996, pp.421-443.

Berresford, G.C. and Rockett, A.M., "Applied Calculus", 2nd edition, Houghton Mifflin, Boston, MA, 2000, chap 9.

Blischke, W.R. and Scheuer, E.M., "Calculation of the Cost of Warranty Policies as a Function of Estimated Life Distribution", *Naval Research Logistics Quarterly*, (22), 1975, pp.681-696.

Boulding, W. and Kirmani, A., "A Consumer-Side Experimental Examination of Signaling Theory: Do Consumers Perceive Warranties as Signals of Quality", *Journal of Consumer Research*, (20), 1993, pp.111-123.

Glickman, T.S. and Berger, P.D., "Optimal Price and Protection Period decisions for a Product Under Warranty", *Management Science*, (22), 1976, pp.1381-1389.

Menezes, M.A.J. and Currim, I.S., "An Approach for Determination of Warranty Length", *International Journal Of Research In Marketing*, 9(2), 1992, pp.177-196.

Moskowitz, H. and Chun, Y.H., "A Poisson Regression Model for Two-Attribute Warranty Policies", *Naval Research Logistics*, (41), 1994, pp.355-375.

Padmanabhan, V., "Warranty Policy and Extended Service Contracts: Theory and an Application to Automobiles", *Marketing Science*, 12(3), 1993, pp.230-247.

Scitovszky, T., "Some Consequences of the Habit of Judging Quality by Price", *Review of Economic Studies*, (12), 1945, pp.100-105.

Teng, J.T. and Thompson, G.L., "Optimal Strategies for General Price-Quality Decision Models of New Products with Learning Production", *European Journal of Operational Research*, (93), 1996, pp.476-489.

# Comparison of the Influence of Additive Life Distributions on the Optimal Dynamic Pricing and Warranty for Non-repairable Products

PEI-CHUN LIN *

## ABSTRACT

This study presents a decision model for manufacturing firms used to determine the optimal dynamic price and free replacement warranty period and to maximize profits according to the pre-determined life cycle. In order to conform to the reality, we do not assume that a product resumes its original warranty when replacement occurs. Instead, this research considers the free-replacement warranty under which failed items are replaced free of charge until a specified total operating time has been achieved by the customer. To explore the effect of additive life distributions on dynamic pricing and free replacement product warranty, a numeric method is developed by evaluating the expected renewal frequencies based on renewal processes. Then the expected renewal frequencies are used to deduce the total cost of providing a warranty. The results are used to derive the optimal dynamic price and warranty by applying the optimal control theory to maximize profits when demand is related to the cumulative sales. Under the setting of separable and logistic growth demand function, we found that optimal policies are characterized by simultaneously increasing, or reducing, both price and warranty period and the optimal policies should never be moving up or down in opposite direction.

Keywords: warranty, free replacement, dynamic pricing, renewal processes, optimal control theory

---

* Pei-Chun LIN, Assistant Professor, Department of Information Management, National Kaohsiung First University of Science and Technology.